線形代数 II　質問に対する回答

No. 2　(２００８年5月２７日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．

６月１７日（火）の授業時間に線形代数学 II（担当：石川）の中間テスト（１回目のテスト）を行う予定です．持ち込み不可．８５分．試験範囲は，６月１０日（火）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を必ず受けてください．（なお、期末テスト（２回目のテスト）は、今のところ８月８日（金）（最後の講義日）を予定しています。）

問. 行列は図形のような手段で観察、解釈できるのでしょうか？
答. できます．行列は,「線形写像」という幾何的な概念をわかりやすく表現するものです．図形そのものではなく，図形の変換，であると捉えるのです．講義で詳しく説明します．
問. ベクトル空間の基はどのように使いますか？ // 基や次元がわかるようになると、何が得られるようになるのでしょうか？
答. 次元を調べることで，ベクトル空間の「大きさ」「サイズ」がわかります．さらに，基を求めて，それを基準にすれば，抽象的な「ベクトル」を数ベクトルで表すことができます．
問. ベクトル空間の基がたくさん存在する、とはどういう意味ですか？
答. たとえば，$\mathbf{R}^2$ で言うと，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ （標準基）も基だが，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ も基だし，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$ は，a がどんな実数でも，基になります．このように，基がたくさんあります．
問. あるベクトル空間 V の１つの基のスカラー倍である基、以外の基は存在するのでしょうか？
答. 存在します．(直前の回答参照)．
問. 「ベクトル空間の基に含まれるベクトルの個数は、基の取り方によらず一定である」という定理が、うまく分かりません。
答. １つのベクトル空間 V の基を２組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ と $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を持ってくると，$m = n$ が成り立つということです．実際，$m \times n$ 型行列を使って，$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A$ と表され，$A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ が自明な解しか持たないことから，A の階数が n であり，$m \geqq n$ が導かれます．議論の対称性から，同様に，$m \leqq n$ も言えて，結局，$m = n$ が分かります．
問. 基を書くとき、どの程度までキレイにまとめればよいのですか？
答. キレイにまとめる必要はありませんが，なるべく見やすい形に表した方が，よいでしょう．
問. 基（基底）というものを考える必要があるのでしょうか？ これからも、$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ さえあれば、あらゆる空間を表せるような気がしてしまうのですが、なぜ、基底というものが必要になったのか、とても興味があります。
答. $\mathbf{R}^3$ のような標準的なベクトル空間なら，標準基があるのですが，その一部である部分空間に対しては，基という概念が必要になります．たとえば，連立一次方程式の解空間については，標準基が作れないからです．
問. ベクトル空間の次元というと、やはり平面（２次元）や立体（３次元）のものを考えてしまうのですが、全然違うものなのでしょうか？ // 物理でよく使う３次元空間のように、３次元といったら、３つの１次独立なベクトルによるベクトル空間をイメージしてよいのでしょうか？
答. 同じものです．イメージしてよいです．
問. ベクトル空間の次元と違う数のベクトルが与えられて、基であることを示す問題が出たらどうしたらよいのでしょうか？
答. 基の個数は，次元と一致するはずなので，数が違う時点で，基でないことが分かります．
問. ベクトル空間の生成系についてわかりません。
答. ベクトル空間を和とスカラー倍で生成する構成要素です．正確には，与えられたベクトル空間に属するベクトルの１組であって，そのベクトル空間に属するすべてのベクトルが，それらの１次結合で表されるもののことを生成系と言います．基底とは「無駄のない生成系」です．
問. $\dim(V) = n$ のとき、n 個の１次独立なベクトルが本当に基になるのですか？ // n 次元ベクトル空間 V において、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立のとき、V の任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ について、$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の１次結合となる、というところがわかりません。
答. 本当に基になるか，気になりますね．それはともかく，$\dim(V) = n$ のとき，１次独立な最大個数は n です．したがって，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立のとき，V のベクトル $\boldsymbol{v}$ をとると，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ は１次従属になり，$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n + c\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ であって，どれかの係数が零でないような関係式が成立することになりま

す．このとき，$c = 0$ であるとすると，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であることに反するので，$c \neq 0$ が分かり，$\boldsymbol{v} = (-\frac{c_1}{c})\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (-\frac{c_n}{c})\boldsymbol{v}_n$ と表され，生成系であることが示されます．したがって，1 次独立な生成系となり，基になります．

問．なぜ、$\dim(\mathbf{R}[x]_n) = n + 1$ になるのですか？

答．$1, x, \ldots, x^n$ という $\mathbf{R}[x]_n$ の要素が，ベクトル空間としての基になるから，その個数を数えて，次元は $n+1$ となります．

問．$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + \cdots + c_{n+1} \cdot x^n = 0$ の「=」が「多項式として等しい」という意味がよく分かりませんでした。

答．「関数として等しい」というのと同じ意味ですが，左辺が，どんな x に対しても，0 に等しくなる，という意味です．（いわゆる「恒等式」の意です．）

問．行基本変形をするときに、どこから手をつけるのがいいのですか？

答．まず，1 行目，2 行目,... の一番左側（1 列目）を見て，どこかに 1 がないか探します．1 があれば，行を入替えて，それを 1 行目に移動します．(1 がなければ，行基本変形を使って，1 を作ります．1 列目が零ベクトルの場合は，2 列目を見ます．）その後，それを使って，他の 1 列目の成分をすべて 0 にします．次に，2 行目以下の 2 列目を見て，同様の変形を繰り返します．

問．$\mathbf{R}^n$ を座標空間で考えることは可能ですか？

答．可能です．$\mathbf{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，座標空間で，原点から，その成分を座標とする点に向かうベクトルとして表現されます．

問．「解空間」とは何のことですか？

答．方程式を満たす解の全体の集まりのことです．講義では，同次型連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の全体の作るベクトル空間のことを指しています．

問．解空間の表現方法は、基を使う以外にもあるのでしょうか？

答．あり得るとは思いますが、基を使った表現が、一番分かりやすいと思います。

問．次元 (dim) と階数 (rank) の違いは何ですか？

答．次元はベクトル空間に関する数で，階数は行列に関する数であるという根本的な違いがあります．

問．教科書の例題 4.4.1（同次連立一次方程式の解空間の基と次元）についてよくわかりません。

答．方程式の一般解を，1 次独立な解の 1 次結合として表現する，その計算方法を説明しています．

問．教科書の例題4.4.1で、行列を行基本変形して、$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ から、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ x_3 \\ 3x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ で、次元が 2 となったのですが、どこがいけないのでしょうか？

答．方程式の解法が違っています．講義で説明したように，方程式を解くと，$x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5, x_3 = x_4 - 2x_5$ となります．連立一次方程式の行列表示について，もう一度復習してみてください．（テキストでは，x_2, x_4, x_5 を c_1, c_2, c_3 と表示しています．同じことです．

問．演習プリントの問題の解答で、最終的に $x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となったときの x_3, x_5 は何か特別なものですか？

答．特別なものではありません．単なる「任意定数」です．

問．行列と行列式の違いは何ですが？

答．行列は，たてよこにスカラーの並んだ「表」（ひょう）であり，行列式は，とくに正方行列から定まる数です．（行列の一般形で表すと，行列式は文字式で表されます．）ちなみに，行列は英語で matrix，行列式は determinant であり，まったく違いますね．

問．“元” とは何ですか？

答．集合の 1 つ 1 つの構成メンバーのことです．「げん」と読みます．別名で「要素」とも言います．

問．線形代数を理解すると何ができるようになるのですか？

答．線形代数を理解すると，多次元的なデータ解析の方法の数学的基礎をしっかり身につけることができて，数学をはじめとするすべての数理科学において，何でも理解できる自信を持てるようになります．つまり，何でもできるよう（な気に）になります．

問．線形代数の勉強の仕方について、押さえ所、よい参考書を教えてほしいです。

答．押さえ所は，講義ですべて説明しています．よい参考書は，教科書以外にありません．ということで，今後も引き続きよろしく．では，また．