線形代数 II　質問に対する回答

No. 1　(２００８年4月２２日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

６月１７日（火）の授業時間に線形代数 II（担当：石川）の中間テスト（１回目のテスト）を行う予定です．持ち込み不可．８５分．試験範囲は，６月１０日（火）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を必ず受けてください．

問．「線形」の意味は何ですか？

答．「リニア (linear)」です．「まっすぐな」とか，「曲がっていない」というニュアンスがあります．「線形」の意味がいちばん端的に現れるのは，「線形写像」の条件です．それは，$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{v})$, $f(c\boldsymbol{u}) = c\,f(\boldsymbol{v})$ という条件です．$\boldsymbol{u}$ が「インプット」で，$f(\boldsymbol{v})$ が「アウトプット」と見なすと，インプットを足したら，アウトプットも足したものが出る，インプットをスカラー倍したら，アウトプットもスカラー倍される，という性質です．この性質が「線形性 (linearity)」と呼ばれています．そして，この線形性に付随することがらの多くに「線形」という用語が使われています．ところで，世の中は，だいたい線形ではなくて「非線形」の世界（２倍努力しても，２倍の成果は出ない...）なのですが，理想的に「線形」で近似して，線形代数を使うことにより，世の中のことを解明できる場合もたくさんあり，だからこそ線形代数が有用になります．

問．１次独立の条件「$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$ とおいた式から，$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれる」と，直感的な１次独立のイメージ（たとえば，平行でない２つのベクトルが１次独立になること）が結びつきません．// 全く頭の中でイメージすることができないです．割り切ってこういうものなんだ覚えてしまった方がいいんですか？

答．「直感的なイメージで納得した後，割り切って覚えて，何度も使ううちに，忘れられなくなる」というのが理想です．納得の仕方ですが，まず，２つのベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ について考えます．１次独立とは，「$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ とおいた式から，$c_1 = 0, c_2 = 0$ が導かれる」ということです．１次従属とは，「$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ とおいた式から，$c_1 = 0, c_2 = 0$ が導かれない」つまり，$c_1 = 0, c_2 = 0$ とは限らない，つまり，$c_1 \neq 0$ または $c_2 = 0$ であるのに，$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ，つまり，$\boldsymbol{u}_1 = -\dfrac{c_2}{c_1}\boldsymbol{u}_2$ または，$\boldsymbol{u}_2 = -\dfrac{c_1}{c_2}\boldsymbol{u}_1$ となって，$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が平行なベクトルであることがわかります．逆に，平行なら，１次従属であることがわかるので，直感的なイメージで納得できます．また，2 つのベクトルについては，「１次独立」という条件は「平行でない」となり，直感と合います．ただし，３つ以上のベクトルについては，すでに説明した定義で一発で定義できて便利なわけです．直感的には，「１つのベクトルが他のベクトルの１次結合では表せない」つまり「無駄がない」というのが１次独立の意味です．

問．１次独立の条件で，$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$ とおいた式から，$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれない場合が良く分かりません．たとえば，$c_1 = 0$ の場合，$c_1\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$ になります．同様に，$c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ の場合も，$c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}, \ldots, c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$ になり，これらの和は $\boldsymbol{0}$ になるので，$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ はいつでも導かれると思ったのですが．// どのようなベクトルであれ，0 と乗算を行うと，かならず $\boldsymbol{0}$ になるので，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ がどんなベクトルでも，$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ という解はかならず含んでいるので，かならず $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ は導かれると思います．

答．「導かれる」というのは，ある仮定 A から結論 B が導かれる，という意味で使っています．「従う」という表現を使う場合があります．「A ならば B」と表現することもあります．とにかく，A を仮定したら，B でなければいけない，B しかない，という意味です．B のとき A が成立する，ということではなくて，A のとき B が成立する，ということです．$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ し

かない，それ以外にはない，という意味です．1 次独立の場合も 1 次従属の場合も，実際に起きます．

問．平面上の 3 つのベクトルが，方向が皆違っていても，なぜ 1 次独立ではないのですか？

答．平面 (2 次元ベクトル空間) 上では，2 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を適当に何倍かして加えれば，3 つめのベクトル $\boldsymbol{u}_3$ に等しくできます．すると，$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3$，つまり，$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + (-1)\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$ となり，$c_3 = 0$ でない場合が生じるので，定義から，1 次従属となります．

問．どのようにして，1 次独立か 1 次従属なのか判別するのですか？

答．定義に基づいて判別します．具体的には，ベクトルを並べて，行列を作って，その階数で判別します．

問．行列の階数は何の概念を表しているのですか？

答．行列の階数は，線形代数 I のレベルでは，「基本変形で簡約化したときの，零でない行の個数」というだけの意味を持っていましたが，線形代数 II のレベルでは，階数は「列ベクトルの 1 次独立な最大個数」と把握できることになります．逆に言えば，階数が何の概念を表すかを把握するためにこそ，1 次独立という概念を導入した，ということです．

問．なぜ基本変形で，1 次独立か 1 次従属か調べられるのですか？ // 行基本変形を行って，正しい解答が出される仕組みが理解できません．

答．「連立 1 次方程式の理論」を用いています．つまり，p.32 の定理 2.3.3 を使っています．

問．$\mathbf{R}^n$ の n が大きくなった場合の 1 次独立かどうかの確認について，たとえば，$n = 4$ のときは，階数が 4 のときと，4 未満のとき，$n = 5$ のときは，階数が 5 のときと，5 未満のとき，という風に単純に判断していいのでしょうか？

答．$\mathbf{R}^n$ の n ではなく，ベクトルの個数で判断されます．「$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ $n \times r$ 行列 $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r)$ の階数が r 」です．

問．行列式を使った，1 次独立性を調べる方法について教えてください．

答．$\mathbf{R}^n$ の n 個のベクトルの場合には，それらが 1 次独立かどうかは，行列式を使って判定できます．「$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbf{R}^n$ について $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ n 次正方行列 $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ の階数が $n \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \neq 0$」です．

問．演習プリント No1 の問題 1 の基本変形での答えが，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となったのですが，黒板の解答では，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となっていました．答えが違ったのですが，なぜですか？

答．「簡約化」の途中でやめたからです．ここでは階数が分かった段階でやめましたが，簡約化を最後まで行えば，いずれにせよ，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となります．

問．行列を基本変形して簡約化するときの記号，たとえば，① - ② は，第 1 行から第 2 行を引く記号ですか？ また，簡約化はどの程度まで求めればよいのですか？

答．そうです．第 1 行から第 2 行を引いて，第 1 行に置く，という意味の記号です．簡約化せよ，という場合は，最後まで求める必要があります．

問．行列の階数を調べる計算の基本変形の説明は書く必要がありますか？

答．基本変形をするのが主目的でない場合は，(特に指定がなければ) 省略してもよいです．ただし，基本変形に慣れている，と皆さんが自覚できるまでは，なるべく説明をつけた方が「自分自身の自信」のためになると思います．

問．行列を利用する際に，なぜ，行や列を入れかえて，形を変形させせることができるのかわかりません．
答．第５章の線形写像のところで説明予定です．そのときにスッキリ説明できます．
問．ベクトルも行列の一種なのですか？
答．そうです．正確には，「数ベクトル」という言い方をします．たとえば，3 次列ベクトルは，3×1 型の行列（３行１列の行列）と見なされます．
問．ベクトルの定義は何ですか？ 中学校，高校のときに習ったベクトルと，今やっているベクトルは違うのか教えてください．
答．見た目は違うが，実質的には同じものである，というのが答です．いわゆる幾何ベクトル（図形的なベクトル，矢印ベクトル）と数ベクトルの違いです．この授業で扱っている n 次列ベクトルの定義は，$n \times 1$ 型行列です．でも，幾何ベクトルも，平行して重なるものは同じもの，としているので，数ベクトルとまったく同じ情報をもっていて，まったく同じ情報をもっているものは区別する必要がないわけです．
問．W が部分空間である条件の (i) $\mathbf{0} \in W$ がなぜ必要なのかわかりません．W が $\mathbf{0}$ を通らなくても，３次元空間を切りとった平面は確かに存在します．
答．条件 (i) は，W 自身がベクトル空間になるために必要な条件です．ベクトル空間に $\mathbf{0}$ がないと話にならないからです．(たとえば，ベクトルのゼロ倍が計算できなくなります)．なお，$\mathbf{0}$ を通らない平面は，(ii), (iii) の条件も満たしません．(また，部分空間の図示の仕方は，ベクトルの「終点」が，考えている図形の載っている，という了解です)．
問．ベクトルなどを行列で表す際に，行，列のどちらかを利用して表せばよいのですか？
答．どちらでも同じ情報を持っているので，どちらを利用しても構いません．首尾一貫していれば問題ないです．途中で断りもなく変えてしまうと混乱します．この授業では，列ベクトル（たてベクトル）を利用します．
問．「空間」という言葉の意味が良く分からないので，できれば再度説明お願いします．
答．「空間」自体に数学的な定義はありません．「その上で幾何が考えられるような集合」といった意味合いで慣用的に使われている用語です．(狭い意味では，３次元空間を指します．)「〇〇空間」と特定すれば定義があります．たとえば，「ベクトル空間」には定義があります．(テキスト参照)．その他に，「アファイン空間」や「位相空間」「関数空間」などの用語もあります．
答．ベクトル空間をはっきり定義しないのはなぜですか？
問．はっきりした定義があります．講義では時間の都合上と，いきなりベクトル空間の定義を書いても，その意義がはっきりしないので，省略しました．半年後に，テキストにある「ベクトル空間の定義」を読み返してください．その時，「ホホウ，そうだったのか，なるほどね」と皆さんが実感できると思います．
問．４次元以上の空間を表すような図形は存在するのでしょうか？ // n 次元の空間 $(n \geq 4)$ はどんなものですか？ 我々が生活している空間（３次元）よりも大きな次元の世界のことは想像ができないし，また，そのようなものを考える意味はどこにあるのかわかりません．
答．「存在する」ということがどういうことかは難しいところですが，素朴に考えて，４次元以上の空間は，頭の中，あるいは，現実世界の見えないところに存在していると言えます．たとえば，簡単な話，物理学では，３次元空間の物体を，その運動量も合わせて，６次元の相空間 (phase space) の上で考えます．実際に想像して使っています．２個の物体なら，１２次元空間の点として表されます．非常に便利なので，いつでも使います．また，統計学の分野でも，データの種類の数の次元のベクトル空間を用意して，その上で線形代数や微積分を使って，統計処理をします．とても役に立ちます．
問．「無限次元」がよくわかりません．
答．例えば，すべての無限数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を考えて，それら全体からできる空間を考えましょう．これは無限次元の空間です．２つの数列の和は $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ で定められ，スカラー倍は $c(a_n) = (ca_n)$ で定められ，ベクトル空間を形成します．(１つ１つの数列を「ベクトル」と見なす

わけです．）また，関数 $y = f(x)$ の全体も，いわゆる関数空間と呼ばれる，無限次元の空間となります．

問．$\mathbf{R}^4 \fallingdotseq \mathbf{R}[x]_3$（だいたい同じ）の意味がいま一つわかりません．$x$ はどこに絡んでくるのですか？ // $\mathbf{R}[x]_3$ の２つの要素が垂直に交わるとき，その積が 0 となる，というような内積の性質も示すのでしょうか？

答．正確には，$\mathbf{R}[x]_3 \cong \mathbf{R}^4$ という記号で表して，「ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]_3$ は，ベクトル空間 $\mathbf{R}^4$ と同型である」と読みます．これは，和とスカラー倍の「ありよう」だけ，その「型」だけに注目して，その表現方法，つまり，x の式なのか，数ベクトルなのか，については問わない，ということです．式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ と数ベクトル (a_0, a_1, a_2, a_3) を縦に書いたもの，と同一視しています．変数 x は，この場合は，式を次数でまとめる際に必要なだけです．なお，この同一視の仕方は，「内積」のことは考慮してはいません．多項式の積は，$\mathbf{R}[x]_3$ 上では定まりません．（次数が増えてしまいます．）

問．数の集合の中で四則演算が行えるものが「体」と教科書で説明されていたのですが，複素数全体については，例えば $(4 + 2i) \div (2 + i) = 2$ で実数になってしまいます．

答．実数も複素数の一種と考えられるので問題ありません．複素数の商も複素数になります．

問．教科書 p.64 定理 4.1.1 の証明の中で使われている「閉じている」という言葉がどういう意味で使われているのか分かりません．

答．計算結果が，考えている範囲以内にとどまる，という意味で使っています．他に，複素数体は割り算について閉じている，と表現したり，$\mathbf{R}[x]_3$（３次以下の多項式の全体）は，多項式の積について「閉じていない」という言い方をします．

問．教科書の問 4.1 の 1(2) のような問題であっても，３つの条件を満たすかどうかを調べれば部分空間かどうかが分かるのでしょうか？

答．そうです．「３つの条件がすべて成り立つこと」を示せば，部分空間であることが示されます．また，「１つでも条件が満たされないこと」を示せば，部分空間でないことがわかります．１つでも条件が満たされないことを示すためには，「反例」を１つだけ示せば Okay です．

問．教科書 p.65，例題 4.1.1 について，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とすると，$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ と表記されています．$A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるのはなぜですか？

答．$\boldsymbol{y}$ も $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ に属しています．つまり，$\boldsymbol{y}$ は条件式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たしているわけです．そのとき，条件式を $\boldsymbol{x}$ を使って表していますが，$\boldsymbol{y}$ が条件式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たしている，ということは，つまり，$A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ が成り立つ，ということです．だからです．

問．ベクトル空間上で微積は成り立ちますか？ そもそも微積と線形代数学はどのくらい共有するものがあるのでしょうか？

答．ベクトル空間上で微分や積分ができます．それが「ベクトル解析」です．微積分学と線形代数学は，たくさん共有します．実は，「微分」とは「線形化」のことであり，また，微積分で扱う関数自体をベクトルと見なす場合もあります．

問．ベクトルは経済学の分野において，どのように役立つのでしょうか？「金融工学」の授業を受講しているのですが，初回の授業の際に，線形代数 II を受講するのが望ましいと言われました．

答．非常に役に立ちます．金融工学に限らず，科学の基礎は，「微分積分」と「線形代数」であり，世界中の研究者が熟知しているのに，日本の研究者が知らないと，世界から取り残されます．（金融の世界でも，「数学力が高い人材が活躍するのが世界標準」という話を聞いたことがあります）．

問．覚えるべきところは，定義かそれともやり方か，両方ともですか？ 実際に計算するためには，やり方さえ分かっていればなんとかなってしまうと思いました．定義は覚えづらく，覚えなくても計算できてしまいます．ということは，定義は覚える必要はないけれど，理解さえしていて，見れば思い出す程度に覚えればいいのでしょうか？

答．両方です．「定義」も「やり方」も両方覚えてください．そして，覚えたら，忘れてください．つまり，覚えて，理解して，使って，忘れて，見て思い出して，使って，実は誤解していたことに気付いて，理解し直して，使って，忘れて，思い出して，... という具合に時間をかけて「身につけて」いきます．よろしくね．ではまた．