

線形代数学 I 質問に対する回答

No. 3 (2009年7月1日の分) 担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します。他の人の質問も参考にしてください。なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが、回答しづらい質問には回答していないものもあります。回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは、直接質問してみてください。文体を(です,ます調に)統一するため、あるいは、質問の一部に答えるために、質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります。悪しからず。回答書は、<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html>にも掲載予定です。参考にしてください。

連絡事項: 7月15日(水)の線形代数学I(担当:石川)は休講です。

また、8月5日(水)の授業時間に期末テスト(2回目のテスト)を行う予定です。持ち込み不可。85分。範囲は、7月29日(水)の授業で進んだところまで。都合が悪く受験できない人(できなかった人)は、早めに私(石川)に申し出て、追試験を受けてください。

連絡事項: 1年15組のクラス担任としてのオフィスアワーの時間帯[毎週水曜日の午後]を設けています。場所は、この講義で全学教育のS3教室に講義に来ている以外は基本的に[理学部本館 N220](レンガ作りの古い建物の北側の2階)に居ます。訪問を歓迎しています。ただし、急用や会議や出張等で不在のときがあるので、あらかじめメールで事前に(たとえば「相談・質問があるので、○月○日の午後X時に訪問したいのですが都合はいかがですか」など)確認をとってからのほうが確実だと思います。別の曜日でも可能です。メールアドレスは [ishikawa\(at\)math.sci.hokudai.ac.jp](mailto:ishikawa(at)math.sci.hokudai.ac.jp) (ただしアドレスの中の(at)を@に変える)です。よろしく。

問. 「行列式」の存在する意味(有用性)がわかりません。// 行列式は何に使うのですか? // 行列式の意義は何ですか? // 行列式は具体的にどういった場面に役立つのですか? // 行列式はどうしてできたのですか? // 行列式によって何がわかるのですか? // 行列式の使い道は逆行列の有無を調べる以外にはないのですか? // 行列式はベクトルとどのようなつながりがあるのですか? // 教科書の「掃き出し法と面積・体積」のようにベクトルと合わせて行列を考えることはよく出てくるのでしょうか? // 4次正方行列の行列式が表すものは何ですか?

答. 行列式はいろいろな場面で登場します。もともと、行列式は面積や体積の計算と関係して使われ始めたと考えられます。た

たとえば、平面 \mathbf{R}^2 上のベクトル \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 が張る平行四辺形の面積(正確には向きの付いた面積)は行列式 $|\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

で与えられます。3次元空間 \mathbf{R}^3 のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が張る平行六面体の体積(正確には向きの付いた体積)は行列式 $|\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ で与えられます。関連して、平面領域の面積や空間領域の体積を「重積分」で計算すると

きに行列式が登場します。たとえば、 xyz -空間領域 A が uvw -空間領域 B によって $A = \{(x, y, z) \mid x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), (u, v, w) \in B\}$ と表されるときには、 A の体積が $\text{vol}(A) = \int_B \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right| du dv dw$

により計算できます。(行列式は向きの付いた体積を表すので、通常体積を求めるには、行列式の絶対値を使います)。さらに4次元以上でも面積や体積を一般化した「測度」という概念があり、たとえば、4次元球体の測度を行列式を使って求めることもできます。このように、微積分と線形代数学もつながっています。数学は一つなのです。それはともかく、行列式は、その他にも、連立一次方程式を解くために使われます。これは、逆行列に行列式が関わるからで、講義で詳しく説明します。

問. 行列と行列式にはどのような関係があるのですか? // 違いは何ですか? //

答. 正方行列(square matrix)という多次元的な対象から行列式(determinant)というスカラー(scalar, 1次元的な対象)が定まる、という構図です。

問. なぜ A が正則である必要十分条件が $\det(A) \neq 0$ となるのかわかりません。

答. 正方行列 A は、正則だったら、行基本変形の繰り返しで、単位行列 I に変形できます。行基本変形の過程で、行列式は零でない数がかかるだけなので、 $\det(I) = c \det(A), (c \neq 0)$ と表されます。ところが $\det(I) = 1$ なので、 $\det(A) \neq 0$ であることがわかります。また、 A が正則でなかったら、行基本変形の繰り返しで、ある行が零ベクトルであるような行列 B に変形されます。このとき、 $\det(B) = c \det(A), (c \neq 0)$ となりますが、 $\det(B) = 0$ なので、 $\det(A) = 0$ であることがわかります。こうして必要十分条件であることが証明されます。ちなみに、正方行列 A の性質(正則か否か)を判定できるから、行列式はdeterminant(←determine, 決定する)と呼ばれます。

問. 逆行列を求める公式などはありますか?

答. あります! 講義で説明します。

問. 行基本変形で行列式が計算できる根拠は何ですか? // 多重線形性について、まだよくわかりません。// どうして行列式は $|A| = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \varepsilon(i_1, i_2, \dots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ と与えられたのでしょうか?

答. 根拠は「行列式の定義」です。また、行列式の「多重線形性」とは、「行の和は行列式の和」「行の c 倍は行列式の c 倍」という性質のことを指しています。さらに「行を入れ換えると行列式は -1 倍」という性質は行列式の「交代性」(あるいは歪対称性)と呼ばれています。講義や教科書では、順列の符号を用いて行列式の定義を与えましたが、 $\det(I) = 1$ という性質と「多重線形性」「交代性」から、行列式はただ1通りに定まること、つまり、定義するなら教科書や講義で紹介した定義しかあり得ない、ということが証明されています。

問. 順列の話と行列式がうまくつながりません. // 行列式がなぜ $n!$ 個の項からできているのか, どのような組み合わせでそうなっているのかがよくわかりません. // 2 次や 3 次の行列式も同じ原理なのでしょう? // サラスの方法の詳しい説明をしてほしいです. // どういう基準で符号がつけられているのですか?

答. すべて「行列式の定義」に基づいています. サラスの方法は行列式の定義そのものです. ただし, 本当は, 理論が整備された後で見ればそう考えられる, ということであって, 歴史的には, 「2 次や 3 次の行列を調べるときに, 重要な数があるようだ. その数 (=行列式) は, こうすれば計算できるようだ (サラスの方法), この方法をもっと高次の行列に対してどのように決めたらよいか...」ということによって一般的な行列式の定義が定着した, ということだと思います.

問. 「行の和は行列式の和」というのが納得できませんでした.

答. たとえば, $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{vmatrix}$ の計算を見てみましょう. $D = a_{11}(b_{22} + c_{22}) - a_{12}(b_{21} + c_{21}) = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + a_{11}c_{22} - a_{12}c_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$ となる, ということです.

問. 行列式の基本性質について, 複数組み合わせざつていたらどうなるのですか? // 「ある 2 行を c 倍すると行列式は c^2 倍」となるのですか?

答. なります. 基本性質を続けて 2 回 (あるいは好きなだけ) 適用します.

問. 行列式を導く楽な方法は, 1 行目の第 2 成分以下を 0 に, あるいは 1 列目の第 2 成分以下を 0 にして, サイズをどんどん小さくしていくことですか?

答. その通りです. 行基本変形を使って変形して行って計算します.

問. $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots$ というふうになることがよく分らないです.

答. 下三角行列の場合, 1 行目に注目すると第 2 成分以下が 0 なので, a_{11} と (2, 2) 成分から右下の $(n-1)$ -次行列式の積になります. さらに, $(n-1)$ -次行列式も同じように計算できるからです.

問. サラスの方法が 4 次以上の行列式では成り立たないのはどうしてですか?

答. たとえば 4 次の場合だと, 行列式の計算には $4! = 24$ 項の計算が必要になるからです.

問. 順列を偶順列と奇順列に分類する意味はあるのですか?

答. 意味があります. 整数を偶数と奇数に分類しますね, 数式の中に $\sum_i (-1)^i \dots$ という形の式をよく見かけると思いますが, これは, 偶数, 奇数によって, 符号を付け替えているということです. それと同様で, ここでは, 行列式を計算するときの符号を定めるときに順列の符号を使いました.

問. $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列を考えるときは, $(1, 2, \dots, n)$ が基準ということによいのですね.

答. その通りです.

問. 転倒数の意味がよくわかりません. // 転倒数を手早く求める公式はないのですか? // 転倒数は何故, 誰が考えたのでしょうか?

答. 実は転倒数の偶奇だけに興味があります. その場合, 順列を $(1, 2, \dots, n)$ から 2 文字を入れ換える操作を何回行って得られる順列か, その回数 (偶奇) で計算できます. 転倒数 (の偶奇) を誰が最初に考えたかについては不明ですが, ともかく, 極めて自然な概念だと言えます.

問. 行を入れ換えると行列式の符号が変わることに理由として $\varepsilon(i_1, \dots, i_j, \dots, i_l, \dots, i_n) = \varepsilon(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, i_n)$ を用いしましたが, なぜ理由が説明できるのかわかりません.

答. 教科書 p.61 に証明があります.

問. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ の

証明が知りたいです.

答. 講義で説明します.

問. $|A| = |{}^t A|$ が成立しませんか?

答. 成立します. (証明も補足説明に書いてくれたもので合っています. テキスト p.66 にも別証明があります).

問. 行列式の計算は列でもできるのでしょうか?

答. できます. 直前の問答にあるように, 転置しても行列式が変わらないからです.

問. 対称行列や交代行列はあまり重要ではないのですか?

答. 重要です. ${}^t A = A$ となる正方行列を対称行列, ${}^t A = -A$ となる正方行列を交代行列とよびます. 主に線形代数学 II で活躍します.

問. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ を行基本変形にして, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A^{-1}$ となるのはどうして

ですか?

答. $(A|I)$ を行基本変形して $(I|B)$ になったとします. このことは, 基本行列の性質から, ある正則行列 P があって $P(A|I) = (I|B)$ となることを意味します. ところが, 左辺は $(PA|P)$ なので, 比べると, $PA = I, P = B$ となることがわかります. 一番目の式から $P = A^{-1}$ なので, $B = A^{-1}$ がわかります.

問. 掃き出し法での説明の仕方がよくわかりません. 一度の変形で複数の行程を行ってもよいのですか?

答. よいです. とにかく, わかりやすく説明を付けてくれれば大丈夫です. 説明を付けてくれれば, 正しく変形しているかどうかがよくわかるからです. なお, 複数の行程が独立なとき (手順の前後が関係ないとき) に, まとめて書けば, 簡潔でわかりやすい説明になります. よろしく. ではまた.