線形代数学Ｉ　質問に対する回答

No. 2　(２００９年５月２７日の分)　担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してみてください．文体を(です，ます調に)統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．悪しからず．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．参考にしてください．

連絡事項: ６月１７日（水）の授業時間に線形代数学Ｉ（担当：石川）の中間テスト（１回目のテスト）を行う予定です．持ち込み不可．８５分．範囲は，６月１０日（水）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を受けてください．

連絡事項: １年１５組のクラス担任としてのオフィスアワーの時間帯 [毎週水曜日の午後] を設けています．場所は，この講義で全学教育の S3 教室に講義に来ている以外は基本的に [理学部本館 **N220**]（レンガ作りの古い建物の北側の２階）に居ます．訪問を歓迎しています．ただし，急用や会議や出張等で不在の時がしばしばあるので，あらかじめメールで事前に（たとえば「相談・質問があるので，○月○日の午後 X 時に訪問したいのですが都合はいかがですか」などと）確認をとってからの方が確実だと思います．その場合は別の曜日でも可能ですね．アドレスは上のホームページに書かれています．（ただしアドレスの中の at を @ に変える.）よろしく．

問．はき出し法を上手に用いる手順はありますか？ // どうどう巡りをしてなかなか終わりません．// コツを教えてください．// ポイントは何ですか？ // どの列に注目すればいいのですか？ // 結果の見通しがつきづらく，解くのが大変な気がします．// 最短を目指すには慣れしかないのですか？
答．「左から右へ」そして「上から下へ」が大筋の基本です．具体的な手順を書きましょう：(1) まず，１列目（左端の縦の列）を見ます．万一，１列目が零ベクトルならその右側の２列目を見ます．(2) 零ベクトルでない場合，その列の一番上の成分を見ます．それが零ならその下を見ます．(3) このように「一番左・上にある零でない成分」に注目して，それを行の入れ替えで，１行目に移動します．（行基本変形のパターン３.）その際，どこかの成分に１があれば，その行と１行目を入れ替えるのも良い．(4) そして１行目を何倍（何分の一）かして，そこに「１」をこしらえます．（行基本変形のパターン１）．(5) その「１」に注目して，２行目から１行目の何倍かを足して「０」を作ります．（行基本変形のパターン２.）(6) こうして，その列は「標準ベクトル」に変形されます．次にその右側の列を見ます．あとは，(1)〜(5) を繰り返します．（文章で書くと手順が多そうに見えますが，すべて機械的な手続きであり，慣れれば迷うことは絶対ありません．瑣末な計算間違いはあり得ますが.）
問．階段行列がよくわかりません．// 階段行列を扱うメリットは何ですか？ 階段行列は何のためにあるのですか？ 掃き出し法で２つの行を入れ替えるのは階段行列にするためですか？ // どのようにして階段行列が発案されたのですか？ // 発見の経緯は何ですか？
答．掃き出し法を，行列の「左の列から行う」「上の行から行う」ということにすれば，自然に階段行列に到達します．行の入れ替えは，確かに「上の行から行う」ためです．
問．行基本変形について，変形のときに何もしない行があっても良いのですか？
答．良いです．実際，変形は本当は１操作ごとに行っています．それをまとめて行っても影響（誤解）のないときに２〜３の基本変形をまとめて書いています．
問．行列を使って掃き出し法で連立一次方程式を解くメリットは何ですか？ // 行列において，１つの行だけをスカラー倍したり，１つの行と別の行を足したり引いたりすることに抵抗を感じます．
答．「しくみ」がわかりやすくなる，というのが最大のメリットです．方程式のままで解くのとまったく同じですが，その操作を「抽象化」しています．慣れれば大丈夫です．
問．行基本変形をした行列はもとの行列とは全く違う気がします．// 掃き出し法によって変形する前と変形した後の行列はどんな関係をもつのですか？
答．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ から行列 $(A|\boldsymbol{b})$ を行基本変形を何回か行って，行列 $(A'|\boldsymbol{b}')$ に変形されたとしたとき，これらには，「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$」つまり，$\boldsymbol{x}$ に課した方程式としてまったく等価な条件になっているという関係を持ちます．（$\Longleftrightarrow$ は「必要十分」という記号です.）私たちが方程式を「解く」ということは，このような関係をもつ $(A'|\boldsymbol{b}')$ の中で，「簡単」な形のものを見つける，ということになります．
問．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ という連立一次方程式において，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{0}$ であるときとそうでないときで計算方法に違いがあるのがよく理解できません．
答．計算方法に違いはありません．同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合，行列は $(A|\boldsymbol{0})$ となり，どんなに行基本変形をしても，最後の列は $\boldsymbol{0}$ のままなので，書かなくてもわかるから省略できる，ということです．
問．ある行列から導き出せる階段行列が一つであるのはなぜですか？ // 作業のしかたによっては色々は形が出来そうに思えるのですが？
答．この事実は，教科書の補足の p.47 に見られる「１次独立なものの最大個数 = 階数」という考え方を用いると証明することができます．つまり，まず１列目だけを見ると，そこの部分だけの階数は 1 か 0 ですね．１列目と２列目だけを見ると，そこの部分だけの階数は 2 か 1 か 0 です．このような場合分けに応じて，階段の形がまず

決まります．さらに階段の段差ができる列は，標準ベクトルに変形できるはずだし，段差がない列は，それより前の列のうちで標準ベクトルとなっている列の 1 次結合で一通りに表されるはずなので，その列の形も決まります．（証明の詳細については，直接質問してください．）

問．$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は 3 ですか？

答．そうです．

問．階数を定義する必要性がわかりません．// rank の具体的な意味は何ですか？ // 解の存在条件が分かるより深い理由がある気がしたので質問しました．// rank とは，式を解かずに解の判別を行う二次方程式における判別式 D のようなものですか？

答．行列の「階数」は解の存在条件を書くために導入した概念ですが，確かに，もっと深い意味があります．それは，「線形代数学 II」を学んだ後でわかるようになっているですが，少しだけ予告しておくと，「階数とは，行列を線形変換と見なしたときの像の次元である」ということになります！

問．どうして解の存在条件が $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}A$ となるのですか？

答．もし $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}A$ だと，階段行列にしたときに最後の列に段差がないので，階数の数だけの未知数が，残りの未知数で表され，解の存在が示されます．また，もし $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) > \mathrm{rank}A$ だと，階段行列で最後の列に段差ができて，$0 = 1$ ということが導かれてしまい，解が存在すると仮定すると矛盾になります．

問．連立一次方程式を解いて無限個の解が出るとき，その無限個の解になる文字は何を置いてもいいのですか？

答．何を置いてもいいです．任意定数にどんな文字を使っても構いません．

問．行列やベクトルはなぜ割り算はないのでしょうか？

答．特別な場合には割り算があります．つまり，正則行列については，逆行列が「逆数」の役割を果たしていると見なせます．ただし，掛け算は掛ける順序を気にしなければいけなかったので，割るというより，「逆行列を掛ける」といった方が紛らわしくないでしょう．

問．２次正方行列以外の行列の逆行列の成立条件はありますか？ // 2×2 型以外の行列の逆行列の求め方はないのですか？ // 2×2 型の行列式において，逆行列の存在を $\det(A) \neq 0$ としていたのですが，3×3 またはそれ以上において逆行列の存在を判定する式はあるのですか？

答．あります．n 次正方行列 A に対して行列式 $\det(A)$ が定まり，$\det(A) \neq 0$ が逆行列の存在条件（つまり，A が正則行列になる条件）になります．逆行列を求める公式もあります．講義でこれからわかりやすく説明していきます．乞うご期待！

問．クラメルの公式で連立一次方程式の解が求められてしまうのが不思議です．

答．なるほど．ただし，クラメルの公式で解けるのは，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で A が正方行列で正則な場合に限ります．$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ として，A^{-1} の公式をあてはめるわけです．また，実際に解を求めるには，掃き出し法の方が簡単な場合が多いです．

問．3×2 型など正方行列ではない行列の逆行列の有無を知りたいです．

答．正方行列以外の場合は，逆行列はありません．

問．転置行列は何に使うのですか？

答．いろいろな使い方がありますが，たとえば，列ベクトルを書くスペースがない時に，${}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と書いたりするときにも使います．列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積が ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ と表されるので便利です．（なお，${}^tA$ を A^T と書いている文献もあるので注意．）

問．行列を使って，連立一次方程式だけではなく，他の方程式も解けるのですか？

答．解けます．たとえば，フィボナッチの方程式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ （有名な差分方程式）が行列を使って解けます．行列は他にもいろいろ役に立つので安心して勉強してください．

問．行列式の発見（発明？）は関孝和によるというあいまいな記憶があるのですが真偽の程はどうですか？ 関先生が行列式を発見（発明？）したのであれば，行列それ自体の発見（発明？）より前のことになりませんか？ 行列式が行列より前にあったとしたら，それはまた興味深い事実です．

答．本当です．関孝和という江戸時代の数学者が行列式を世界で初めて発見しました．ちなみに，数学の場合は，「発見」という言葉を使い，「発明」とは言いません．行列自体の発見は，行列式よりも歴史的に後です．今から考えると信じられないかも知れませんが，「行列」や「ベクトル」という多次元的な考え方には抵抗があったのでしょう．（行列式は，式あるいは数なので，「歴史的な抵抗」が少なかったのだと推測できます．）

問．良い参考書などがあれば教えてください．

答．現在使っている教科書が最良の参考書です．安心して勉強してください．

問．先生に用事があるとき，メールなどでアポをとってから伺ったほうがいいのでしょうか？

答．はい，その方が確実だと思います．（もちろん，アポなしで訪問してくれても歓迎しますが，不在のときもあるだろうし，「とりこみ中」かも知れないので．）

問．先生にとって ”数学 = 愛”ならば，先生にとって ”若さ” って何ですか？

答．なぜ「愛」から「若さ」につながるのかよくわかりませんが，それはともかく，”若さ” とは「可能性が高い」ということですね．皆さんは若くて可能性がたくさんあるわけです．よかったですね．時間が経つと，可能性が（零にはならないけれど）だんだん減ってきます．そういう意味で，一日一日を大切に「愛」を持って生きていかなければもったいない，ということでしょうね．（コメント欄にあった質問で，ありがたいですが，回答書で回答するのは今回限りとします．）ではまた．