線形代数学Ｉ　質問に対する回答

No. 1　(２００９年４月２２日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．(他の人がどんなことを質問しているかも参考にしてください．) なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．. 回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

６月１７日（水）の授業時間に線形代数学Ｉ（担当：石川）の中間テスト（１回目のテスト）を行う予定です．持ち込み不可．８５分．試験範囲は，６月１０日（水）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を受けてください．

問．行列での「行ベクトル」「列ベクトル」と，あの「ベクトル」とどの様につながっているか教えてください．// “ベクトル” という単語を辞書で調べると定義は「大きさと方向性をもった量」となっていました．しかし，行ベクトルや列ベクトルに大きさはあっても，方向性や量があるという感じがしません．// 高校のときは全く別物のように扱って勉強してきた行列とベクトルは深い関係があるのですか？ それとも全然別物なのですか？

答．なるほど．ベクトルの幾何的イメージははっきりしているのに，行列の幾何的イメージがはっきりしていないわけですね．数学で扱う対象はいろいろありますが，それぞれに「形式的な定義」と「幾何的イメージ」の両方を知る必要があります．行列の形式的定義は講義で説明しました．行列の幾何的イメージについてはこれから順次説明していきます．そうすれば，行列もベクトルも密接に関連していることが分かります．ベクトルの形式的定義として，「行ベクトル」や「列ベクトル」があります．「大きさと方向」を n 次の数の組で表しているわけです．このようにベクトルにしても行列にしても，いろいろな捉え方があり，それらに深い関係があります．

問．行列の有用性について教えてください．高校では行列はただの計算問題だけになっていて，あまり平面や空間の計算には用いませんでした．ベクトルではできなくて，行列にはできるというところを教えてください．

答．ベクトルも行列も一体となって，平面や空間の幾何に役立ちます．この講義でも，計算だけでなく，応用の仕方などもなるべく説明していきたいと思っています．乞うご期待．

問．行列の掛け算の意味がわかりません．// どんな便利なことが，また，どんな目的を果たしたかったのですか？ // 行列の積は一次変換，線形変換だと聞きました．// 計算結果は何を表すのでしょうか？ // 空間（３次元）と 3×3 行列にも関係があるのですか？ // 「変換」というのがよく分かりません．行列のルーツは図形ではないでしょうか？

答．行列のルーツは図形です．n 次正方行列 A が与えられると n 次列ベクトル（縦ベクトル）$\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x}$ に変換する「一次変換」(線形変換とも言います）が決まります．たとえば，３次元空間は $\mathbf{R}^3$ で表すことができます．そうすると 3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して一次変換 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$ が定まります．このとき，変換を「続けて行うこと」が行列の積で表されます．A で変換した後で B で変換するのと，行列 BA で変換することが同じになります．(掛ける順序に注意)．

問．行列の積ではなぜ交換法則が成り立たないのですか？ 行列 A, B の積でかける順番が変わると，答えがなぜ異なるか疑問に思いました．// 「かける順序が大切，ものごとには順序がある」ということですが，それがそのようなことを表しているのかが良く分かりませんでした．

答．AB と BA が等しいとは限らない，ということですが，具体例を講義で紹介しました．なぜ等しいとは限らないか，それは，行列の積が一次変換という操作を続けて行うことに対応していて，２つの操作の順序は，その操作がまったく独立でない限り，入れ替えることができないからです．(靴をはくことと靴下をはくことは可換ではありません．靴をはくことと手袋をはくことは可換です．ちなみに，北海道では「手袋をはめる」ことを「手袋をはく」と言います．)

問．単位行列はどのように定めたのですか？ // 単位行列の意味が良く分かりません．

答．「何も変えない」という一次変換 (= 線形変換) に対応するものとして定められました．つまり，n 次正方行列 A に対して，$\mathbf{R}^n$ の一次変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が定まりますが，$A = I$ の場合に限り，「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$」ということが成り立ちます．

問．単位行列とクロネッカーのデルタの意味が理解できません．// $I_n = \delta_{ij}$ であると教科書に書いてあり，クロネッカーのデルタと単位行列のどこが異なるかわかりません．何故「デルタ」にしたんでしょうか？ // クロネッカーのデルタがあると何が便利なのですか？

答．正確に書くとカッコをつけて $I_n = (\delta_{ij})$ あるいは $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ と書きます．つまり，(i, j) 成分が δ_{ij} である行列が単位行列です．複雑な「テンソル計算」をするときに便利です．対角線は diagonal （ドイツ語で Diagonale，ちなみに Kronecker はドイツ人）なので，その頭文字の d に対応するギリシャ文字を使っていると思われます．

問．教科書に「$1 \leq i \leq m$」と書いてありましたが，これは $\leqq$ と同じ意味でしょうか？

答．同じ意味です．

問．単位行列を表す文字 I, E の使い分けは？

答．使い分けはありません．どちらの記号を使ってもよいです．

問．行列は非可換なのに何故「一次変換」は可換なのですか？ たとえば，y 軸対称に点を動かす一次変換と f_1，x 軸対称に点を動かす一次変換を f_2 とすると，f_1, f_2 の順番で動かしても，f_2, f_1 の順番で動かしても結局同じ点に変換されるのはどうしてですか？

答．一次変換でも交換法則は成り立ちません．問の例の場合は偶然に可換になっています．行列の言葉で翻訳すると，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立ちます．(対角行列どうしは可換です)．

問．対角行列とは何ですか？

答．正方行列であって，$i \neq j$ のとき (i, j) 成分が 0 になっているような行列のことを言います．

問．(i,j) 成分とは何ですか？
答．行列は数を横と縦に並べたものです．第 i 行，第 j 列の位置にある成分（数）を (i,j) 成分と言います．
問．A^n を計算するとき結合・交換が可能なのはなぜですか？ 一般の行列計算では交換できないのに $A\cdot A^3$ と $A^3\cdot A$ が同じで交換可能なのはなぜですか？
答．「交換法則」は成り立ちませんが，「結合法則」は成り立つからです．つまり，$A(BC)=(AB)C$ は成り立ちます．(ただし，積が定義できる型の場合)．特に A が正方行列のとき $A(AA)=(AA)A$ が成立し，両辺を A^3 と書くわけです．同様に，$A\cdot A^3=A(A(AA))=(AA)(AA)=((AA)A)A=A^3\cdot A$ となり，これが A^4 となるわけです．このように普通の式と同じなので安心です．
問．行列の計算（特に積）のミスをへらす方法はありますか？
答．方法が２つあります．１つは注意深く計算すること．もう一つは「理論」を学んで，無駄な計算をしないことです．理論については，この授業でおいおい紹介していきます．
問．A,B が共に零行列でなくても $AB=O$ が成立する場合があるとのことですが，これは何故ですか？ // ベクトルの内積が 0 になることがあることと何らかの関係があるのでしょうか？
答．関係があります．行列の積について，行列 A の行ベクトルたちと行列 B の列ベクトルの「内積」がすべて 0 のとき (幾何的に言うと「直交」するとき）そのときに限り $AB=O$ が成立します．
問．行列はいつ，誰が何の為に考えたのですか？ // 行列は何故生まれたのですか？
答．行列が考えられたのは１９世紀ごろ，ケーリー・ハミルトンの定理で有名なケーリーが考えたと言われています．(それ以前にも先駆者はいたようです)．この講義で説明するように「連立一次方程式」との関係で考えられたと推測できます．
問．2 次の正方行列以外にもケーリー・ハミルトンの定理のような定理が存在するのでしょうか？ // ３行３列の行列にもハミルトン・ケーリーの定理なるものはあるのですか？ // 3×3 行列でもハミルトン・ケーリーの定理は使えるのですか？
答．あります．n 次正方行列についての「ケーリー・ハミルトンの定理」があります．[一応書いておくと，一般の次数の「行列式」を使って，$\Phi_A(t)=\det(tI_n-A)$ という一変数多項式を考えたとき，$\Phi_A(A)=O$ が成り立つという定理]
問．なぜ行列は割り算ができないのですか？
答．できます．ただし，条件があります．行列 A が「正則行列」の場合には「逆行列」A^{-1} が存在し，スカラーの場合の「逆数」と似た役割を果たします．(ただし，行列なので，運用には注意)．
問．演習プリント 1-2 では $A^n=\begin{pmatrix}1&0&2n\\0&1&3n\\0&0&1\end{pmatrix}$ が成り立っているように思われます．
答．なるほど．成り立ちますね．皆さん，数学的帰納法で証明してみてください．
問．掃き出し法は必要なのでしょうか？ 中学校で習った加減法となんら変わらないと思いました．
答．「掃き出し法」は “システマティックに” 方程式を解く方法です．「ただ解ければよい」ということではなく，「なぜ解けるか，解かないか，という原理原則」を理解できる方法です．今後の授業で詳しく説明して，その神髄を皆さんに徹底的に身につけてもらう予定です．
問．A^n で n が整数以外の場合はどのように考えるのですか？
答．通常は考えません．
問．$m\times n$ 型と $n\times m$ 型は何が違ってくるのですか？
答．行の個数と列の個数が違ってきます．(次の「転置行列」も参照)．
問．転置行列はなぜ定められたのですか？ テキスト 17 ページの練習問題１の７問目 (4) の「n 次正方行列 A に対し，B を対称行列，C を交代行列としたとき，$A=B+C$ が成り立つならば，$B=\frac{1}{2}(A+{}^tA), C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ を示せ」という問題をみて，今日の物理の授業で習った $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ の式との類似から，この質問をしました．
答．他の科目との関連を考える．類似を考える，ということは非常に良いことです．私 (石川) はこの類似についてはわかりませんが，ともかく，転置行列は「双対性」と関連していて，深い数学につながっていきます．いずれ説明できると思います．
問．座標や数列を表すとき，独立した文字を並べるときは文字と文字の間にコンマが入っているのに行列のときはコンマを入れない理由が分かりません．
答．コンマを入れても入れなくてもよいです．行列の場合にコンマを入れると煩雑になるので省略しています．
問．行列を学ぶ意義は何ですか？ // 行列が何のためにあるのか，どこで使うのかがわかりません．// 行列はどのように社会に貢献しているのでしょうか？ // 行列の社会的価値・存在意義は何ですか？ // 具体的にどのような場面で使われているのでしょうか？ // 身近なところで行列が使用されている例があったら教えてください．
答．行列を学ぶ意義は，一言で言えば「高次元の量を扱う方法に慣れる」ということです．さらにその方法をうまく応用できれば社会の役に立つと思います．専門的な数学ではもちろん不可欠ですが，それ以外でも，たとえば「統計学」は線形代数を知らないと話になりません．
問．行列は何の役に立つのですか？ もともと数学は「将来の役に立たない」という意見がとても多い教科ですが，その中でも何に使うのかさっぱり見えてきません．行列は今までに数学以外で使ったことがありません．
答．「将来の役に立たない」と誰かが言っても，とにかく，自分の将来は自分で決めるものですね．他人に「役に立つ」「役に立たない」ということがあらかじめわからないし，自分でさえ未来の予測はつけづらいので，無責任な意見には耳を貸さないのが賢明です．多くの人にとって，行列を学ぶことは役に立ちます．(だから，線形代数学の科目を設定します．) 講義でも説明しましたが，世の中の非線形現象を解析するには，必ず行列をはじめとする線形代数を使います．つまり自然科学一般の基礎となります．さらに経済学などの社会科学や心理学などの人文科学でも使われています．このことは今後，皆さんが専門的な学問を身につけていく中で徐々にわかってきます．
問．行列の基本は高校で学び，演算もある程度やりました．もう一度初めから学ぶのは，定義などをより明確にしたりするためなのですか？
答．その通りです．皆さんが高校などでどんな「習い方」をしてきたか千差万別なので初めからしっかり学びます．より高度な数学を学ぶためには，「基礎固め」が必要で，しっかり基礎を固めておかないと，いずれ数学がさっぱりわからなくなって，とりかえしがつかなくなります．基礎的な学問は若いときでないと身に付かない（身に付きづらい）のです．
問．先生にとって数学とは何ですか？
答．愛です．ではまた．