線形代数学Ｉ　質問に対する回答

No. 2 （２００９年１２月１５日の分）　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．以前の回答書ですでに回答済のものは繰り返していません．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してみてください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．悪しからず．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．参考にしてください．

連絡事項: ２月２日（火）の授業時間に線形代数学Ｉ（担当：石川）の期末テストを行う予定です．持ち込み不可．８５分．範囲は，１月２６日（火）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を受けてください．
（１２月２２日終了の中間テストを受験できなかった人も申し出てください．）

問. サラスの方法が３次以下でしか使えないのは何故ですか？
答. 「サラスの方法」は行列式の定義を３次以下の場合にあてはめたものだからです．４次以上の場合は，定義通りに計算すると大変なので，基本変形などの方法を駆使して計算します．講義でこれから説明します．
問. 掃き出し法による逆行列の求め方の原理がわかりません．// テキスト p.43 の説明がわかりません．
答. 行列 $(A|I)$ を行基本変形して $(I|P)$ という形になったら $P = A^{-1}$ となる，ということですが,「行基本変形は基本行列という正則行列を左からかけること」という基本的な事実によって，P が（基本行列をいくつか掛けて得られる）正則行列であって，しかも $PA = I$ となるからです．
問. 逆行列を求めるときに，横に並べて書かれた行列は何を表したものですか？
答. A に施す変形と同じ変形を I にも施して記録していくために配置したものです．
問. 「可逆的」な操作はなぜ重要なのですか？
答. 連立一次方程式の情報を保存していることが保証されるからです．(可逆的でない変形，つまり不可逆な変形では，方程式の意味が変わるので，解いたあとで，もともとの方程式の本当の解になるかチェックする必要が生じます)．
問. 逆行列はどのような重要性をもつのでしょうか？ // 実用的にどう使えるのでしょうか？
答. 「逆数」が一次方程式 $ax = b$ を解法に不可欠だったように,「逆行列」は連立一次方程式の解法に不可欠です．連立一次方程式は実用的に重要なので，逆行列も重要になります．
問. 基本行列の活用法を教えてください．
答. 基本変形を行列の理論で捉えるために導入されたものです．
問. 基本行列の逆行列がわかりません．// $F_n(i;c)^{-1} = F_n(i;\frac{1}{c})$ がよく分りません．
答. 基本変形の逆の操作を表しています．$F_n(i;c)$ は，n 次単位行列の第 i 行を c 倍したものなので，その逆の操作，つまり，第 i 行を $1/c$ 倍したものが逆行列になります．
問. 基本行列の名前 F, G, H に意味はありますか？ // 便宜上適当な記号が使用されているだけですか？
答. 特に意味はありません．便宜的な記号です．
問. (3) ⇒ (1)，(1) ⇒ (2)，(2) ⇒ (3) を示すことで，(3) ⇒ (2) ⇒ (1) ⇒ (3) も示すことができることが，まだよくわかりません．必要十分条件は両方向を証明することができてはじめて成立するのではないでしょうか？
答. 「３段論法」です．「(3) ⇒ (1) かつ (1) ⇒ (2)」 から (3) ⇒ (2) が導かれます．
問. 階数を計算することに（解の存在を判定する以外に）意味があるのですか？
答. 線形代数 II の範囲になりますが，階数は「線形写像の理論」においても基本的な概念です．

問．連立一次方程式の解が無限個存在する条件が $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A) < n$ というのがよく理解できません．
答．解が存在する条件が $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A)$ という条件です．解があるとすれば無限個ある，という条件が $\mathrm{rank}(A) < n$ という条件です．その２つの条件が組み合わされているわけです．
問．行基本変形ではなく，列基本変形を使う必要はあるのですか？ // 列基本変形は行基本変形でまかなえるものと考えてよいのですか？
答．連立一次方程式を解くには，行基本変形だけで十分です．（列基本変形を使うと，未知数の入れ替えが生じるので混乱します）．ただし，「行列式」の計算では，両方の基本変形を使います．講義で説明します．
なお，行列の理論を用いると，基本行列を左から掛けるのが行基本変形であり，右から掛けるのが列基本変形であって，行列の積は可換とは限らないので，行基本変形と列基本変形は別のものであり，片方でまかなえるものではないことがわかります．
問．行列の歴史を教えてください．
答．行列は，ケーリーという数学者が最初に発見した，と言われています．ただし実際には，それより少し前に発見していた数学者がいたようです．
問．高校で習った $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ という公式は大学では使わないのですか？本格的な線形代数には必要ないのでしょうか？ // ハミルトン・ケーリーの定理は便利ですか？
答．基本的な線形代数の理論的枠組みには必要ありません．線形代数 II で学ぶことを使えば証明できる事実です．ただし，使いこなせれば，もちろん便利な公式です．なお，n 次正方行列 A に対してのハミルトン・ケーリーの定理は，A の「固有方程式」$\det(tI - A)$ を t に関する n 次式に展開したときに，$t = A$ を代入すると零行列になる，という定理になります．
問．線形代数と微分積分学とのつながりはありますか？
答．あります．微分とは，一次近似，あるいは線形近似をしていることになり，線形代数が応用されます．行列式は，面積や体積の計算に不可欠になります．
問．教科書 p.34 練習問題 2.1(3) の計算がうまくいきません．
答．質問書に書いてあった計算は間違えてます．もう一度確認してください．たとえば，２行目を 1 行目に加える，という変形をまず行うと計算が楽になり計算間違いを防げるかもしれません．
問．定義・定理の違いについて教えてください．
答．「定義」は定理などに出てくる用語の意味を確定させるものです．定義された用語を用いて，数学的な正しい主張（真の命題）をしているのが「定理」です．定義があやふやだと，せっかくの定理が使いこなせないことになりますね．
問．講義で出てくる定理や公式は，その証明法も覚えておくべきでしょうか？
答．最初に覚えるべきなのは「定義」です．定理や公式については，覚えるというよりは「使って身につける」というのが良い方法です．証明法も覚えるというよりは，なぜ成り立つか，知りたくなったときに証明を読んでみるのがよい方法だと思います．
問．授業中に質問書を渡され，その授業の終わりに提出するのでは質問を考えるあまり授業に集中できません．（コメント）
答．そうですか．もし不都合がある場合には，事前に予習・復習をしておいて質問もいくつか考えておく，もし，授業を聞いていて解決したら，その先のより高度な質問を最後に書く，という感じで大丈夫だと思います．ではよろしく．
問．質問書の評価は後から教えてもらえるのでしょうか？（コメント）
答．成績評価をする時期に直接来てくれれば評価を教えることができます．ただし，採点後の質問書自体は，しばらくしたらシュレッダーにかけてしまうので，返却はできません．試験答案は返却できます．よろしく．ではまた．