線形代数学 I　質問に対する回答

No. 1　(２００９年１１月１０日の分)　担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してみてください．文体を(です，ます調に)統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．悪しからず．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．参考にしてください．

連絡事項： １２月２２日（火）の授業時間に線形代数学 I（担当：石川）の中間テストを行う予定です．持ち込み不可．８５分．範囲は，１２月１５日（火）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を受けてください．

問. 線形代数とは一体どういうものなのでしょうか？
答. 行列やベクトルを用いて，「線形現象を要領よく見通しよく解析する学問」です．そして，この線形代数学 I（担当，石川剛郎）の授業は「行列ができる講義」となることを目指しています．
問. 線形代数学と経済学はどのような関係ですか？
答. 線形代数学は，経済学で不可欠で基礎となる方法です．線形代数を経済学に応用する，という関係です．線形代数学を知らなくて経済学が理解できるなんて，とても想像できません．
問. 線形代数学は現実の世界にどのように応用できるのでしょうか？ // 行列の具体的な使用例を教えてください．// 行列は日常や社会でどのように使用されているのでしょうか？ // 行列はいつ使うのですか？
答. いたるところで行列は使えます．突然ですが，フィボナッチ数列というのを知っていますか？ $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5,$ 一般に $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ という漸化式で与えられる数列です．このフィボナッチ数列の一般項は「黄金比」を用いて表現されます．そのことが，行列を使えば，明確に説明できます．(ここでは説明しませんが)．とにかく，フィボナッチ数列は自然界のいたるところに現れると言われている数列です．実際，この回答書が書いてある A4 版の紙のサイズも黄金比になっているはずです．
問. どうして連立一次方程式を行列で解くのですか？ // 行列で解くメリットを教えてください．// 掃き出し法のメリットは何ですか？ // 行基本変形の持つ意味が分りません．// 意義は何でしょうか？
答. 行列を使うと見通し良く解けるからです．場当たり的に解ければよい，というのではなく，見通しよく解けるというメリットがあります．今後，講義で説明していきますが，掃き出しの操作（行基本変形）は，「正則行列を左から掛ける」という操作で明確に表現されます．(行基本変形が「可逆」であることは，掛ける行列の正則性（逆行列が存在すること）から導かれるわけです)．
問. 掃き出し法で式変形をしていく過程において，残す式というのは，どのようにして決められているのですか？
答. 原則的に「上から下へ，左から右へ」という規則で掃き出しています．$(1,1)$ 成分が 0 でなければ，それを使って，下の方の $(1,2),(1,3),\ldots$ 成分を 0 にします．(計算の都合で，行の入れ替えを適宜行います)．１列目を掃き出したら，右に動いて，２列目の $(2,2)$ 成分を見る，という流れです．
問. 階段行列の説明の意味がよくわかりません．
答. まず，１列目がはじめから零ベクトルだったら，２列目に進みます．２列目が零ベクトルだったら３列目に進みます．はじめて零にならない列に注目して，上から下に見ていって，零でない成分の行を１行目に持っていって，その列を掃き出します．次の列は，２行目から見ていって，同様に掃き出して，ついでに，１行目の成分も掃き出します．この変形で，右側の列は変化しません．このように行基本変形を繰り返して，整理した行列が階段行列です．
問. 連立一次方程式を解く中で，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ のような場合は，解はどうなるのでしょうか？
答. まず，最後の列を別に考えます．すると，この行列を (拡大) 係数行列とする方程式は $x_2 = 3, x_3 = 5,\ 0 = 5$ となり，最後の式は不合理であり，これらをすべて満たす (x_1, x_2, x_3) は存在しない，つまり「解なし」というのが答えになります．
問. 行基本変形は，順番を変えても結果は変わらないのですか？
答. 最終結果（「階段行列」）は，途中の変形の順番を変えても変わりません．途中経過は，いろいろ変わります．

問. 行基本変形ですばやく解を求めるコツを教えてください．問題数をこなして慣れていくしかないのでしょうか？
答. すばやく解を見つける必要はありません．この線形代数の講義や試験では必要ありません．着実に解を見つけられれば大丈夫です．その中で，「仕組みがわかる」と経験をすることが大事で，そのためにこそ慣れる必要がありますね．そういう意味で，（仕組みを観察しながら）問題数をこなしてください．
問. 行基本変形が「独立」とはどういう意味ですか？
答. ２つの変形の順番を変えても，２つの変形をした後の結果が変わらない，つまり「可換な操作」を意味しています．たとえば，１行目を使って２行目を掃き出す変形と，１行目を使って３行目を掃き出す変形は，（１行目はそのまま変えずに）別の行を変形しているだけなので，可換です．つまり，行基本変形を「行列を左から掛ける」ということで表現すると，変形の独立性は，行列の可換性を意味することになります．
問. 行列の形で可逆的な説明はできるのでしょうか？
答. できます．正則行列の言葉で説明できます．
問. 行列の積が何を表しているのかよくわかりません．
答. 「行基本変形」を行列の積で解釈すると，行列の積は，「変形を続けて行うこと」ということを表すと言えます．
問. 連立一次方程式を掃き出し法で解いていって，最後に決まった形にする必要はあるのですか？ // 行の入れ替える操作は必要ですか？
答. 必ずしも必要ではありません．しかし，もし試験問題で指定されたら，決まった形（階段行列）にしてください．
問. 行基本変形の途中で，いずれかの行が 0 となってしまったときの取り扱いがよく理解できません．
答. ある行ベクトルが零ベクトルになったら，要するに，その部分の方程式は，情報を持たない式になるので無視してください．残った式から，解に条件が付きます．
問. 行列において，なぜ交換法則が成立しないのですか？
答. 交換法則が一般には成り立たないことは，講義で実例を紹介しました．その根本的は理由は，「交換法則が成り立つ方が珍しい」ということです．たとえば，靴をはくことと靴下をはくことは可換ではありません．可換でないですね．靴をはくことと手袋をはくことは可換です．つまり交換法則が成り立つ場合もあります．ちなみに，北海道では「手袋をはめる」ことを「手袋をはく」と言いますね．
問. 正方行列以外にも逆行列のようなものは存在するのですか？
答. 存在しません．逆行列が存在するのは，正方行列だけです．（さらに，条件が必要）．
問. 逆行列を $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と覚えておくのは何か問題があるのですか？
答. 問題ありません．覚えておいてください．その上で，この公式は，逆行列の定義から導かれる，ということも覚えておいてください．さらに，一般の n 次正則行列の逆行列の公式も，この線形代数 I の講義でちゃんと説明する，ということも覚えておいてください．
問. クロネッカーのデルタの存在意義はありますか？ これから先にまた使う機会があるとは考えづらいのですが. // クロネッカーのデルタの具体的な使い方がわかりません．// クロネッカーのデルタと単位行列の違いがあるのでしょうか？
答. 情報としては単位行列と同じ情報をもった記号です．単位行列が重要なので，クロネッカーのデルタにも存在意義があることになります．使うと便利です．使う機会もあると思います．
問. 数ベクトルと幾何ベクトルは同じものですか？ // 高校のとき，数 IIB で学んだ位置ベクトルと，この講義で学んだ数ベクトルは，同じベクトルという言葉を使うが，何がどう違うかがわかりません．
答. 「同じものの違う表現法」であると理解すればよいと思います．
問. １行２列の行列と２行１列の行列は，どの様な点が異なっているのでしょうか？
答. 見た目だけが異なっています．でも，それらを「ごっちゃ」にすると収拾がつかなくなるので区別しましょう．
問. $\vec{x} = (a, b)$ という平面ベクトルをわざわざ $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表している理由は何でしょうか？
答. 行列との積を $A\boldsymbol{x}$ というふうに表したいので，列ベクトルで統一しています．単に便宜的な表現法に関することなので，過剰に気にしなくても大丈夫です．
問. なぜベクトルを「$\vec{a}$」のように表さずに「$\boldsymbol{a}$」のように表すのですか？ 高校のときには「$\vec{a}$」で習いました．
答. どちらでも構いません．気にしないでください．たとえば，割り算は $2 \div 3$ と習いますが，その後で，分数の表し方 $\frac{2}{3}$ も習いますね．どちらも正しい表記法です．

問．転置行列の意味について詳しく教えてください．
答．上で説明したように，便宜的に列ベクトルで表したものを，同じ情報を持つ行ベクトルで表した，という意味があります．
問．教書書 p.15 の問 19 の略解がよくわかりません．
答．行列のベクトルによる表記と，その転置行列の表記に関する問題ですね．具体例について書き下してみるとすぐわかると思います．
問．演習プリント No.3 の問題 3-1 の答えの x_3 は，変数ではないのですか？ 定数と変数の定義がよく分っていません．// $x_3 = c(c$ は定数）と置き換えて書く書き方でも問題ないのでしょうか？
答．問題ないです．「任意定数」と書いておけば，どんな文字を使っても問題ないです．ちなみに，x_3 が任意定数という意味は，x_3 を定めれば，1 つの解が表され，x_3 を動かせば，すべての解が表される，というココロです．
問．大文字や小文字の使い分けの仕方が混乱します．
答．行列は大文字，ベクトルやスカラーは小文字，ベクトルは太文字，スカラーは細文字，ということで区罰して見やすくしています．
問．行列を習う中でどうしてベクトルが出てくるのですか？ ベクトルと行列は何かつながりがあるのですか？
答．幾何ベクトルも情報としては，列ベクトルや行ベクトルのような数ベクトルで表されるので，特別な形の行列である，と考えられるわけです．
問．対称行列や交代行列は今後どの場面で使いますか？
答．たとえば，（線形代数 II の）「対角化」という項目で登場します．
問．行列式を効率的に求める方法を教えてください．
答．もう少ししたら講義で詳しく説明します．
問．掃き出し法では解けるけど，クラメルの公式では解けない連立一次方程式の問題はありますか？
答．沢山あります．もう少ししたら講義で詳しく説明します．
問．文系の人間が線形代数，微分積分を学ぶ意義は何ですか？ 自分は数学を暗記科目と捉えているので，覚えて繰り返し練習すればよいと考えているので，現時点で疑問らしい疑問はありません．
答．人間に「文系」とか「理系」とかといった区別はもともとありませんね．現代社会で，そんな悠長な区別をしていたら生き残れません．誰でも必死で身につけた必要な知識を駆使してがんばって生きていきます．誰もみな，将来，自分がどんな人生を歩むか皆目わからないので，とりあえず，そのための一般的な基礎体力，基礎知識，できれば世界標準の知力を今のうちから身につけておきたいわけです．皆さんの年頃の人たちが，世界中で線形代数や微分積分を習っている理由の 1 つは，年ととってから，線形代数，微分積分を勉強するのは無理だからです．若いときは若いときでないと身に付かないことを中心に勉強しよう，という趣旨です．ところで数学は暗記科目とのことですが，覚えて繰り返し練習することを「暗記」とは言わないと思います．繰り返し練習して身につけるのだから，「明記」と言いましょう．数学は覚えることが少なくて済むので，典型的な「明記科目」と言えますね．
問．板書は書きうつすべきですか？
答．もう皆さんは子供ではないので，好きなようにしてください．書きうつしてもよいし，要点だけをメモしてもよいし，その場で頭に叩き込んでもよいし，教科書に落書きしてもよいし... 講義内容を理解しようとしている限り自由です．
問．質問書の「100 字程度以上」とはどういう意味でしょうか？（コメント）
答．95 字でもよいし，200 字でもよい，という意味です．もし「100 字以上」と決めると，95 字は条件にあっていなくなり，もし「100 字程度」と書けば，200 字は条件に合わなくなってしまいますね．要するに補足説明は，なるべく詳しく書いてね，ということです．
問．質問書が評価対象なのは何故ですか？ わからないことは，教科書を見直すなり，よく考えるなりして自力で解決できる人もいると思います．同程度勉強熱心で着眼点が同じでも，わからない所があり，それを自分で解決出来ない，または自分で解決しようとせずに教師に委ねる人の方が高く評価されるシステムではありませんか？
答．なるほど．そう考えたくなるのももっともですね．でも誤解です．もし思いついた質問が自力で解決できたら，その先のよりよい質問が思い浮かぶので，それを質問してください．そのような良い質問内容は，高く評価されます．もし自分で何も考えていないような質問なら，質問内容を読めば「何も考えていない」ということは明白にわかるので，高い評価は得られません．したがって，質問書は皆さんの理解度を的確に評価する基準の 1 つになるわけです．もちろん，テストも重視します．細かいことは心配ぜすに，プロの判断を信用して任せてください．では，よろしく．
問．休講が多いようですが，大丈夫ですか？（コメント）
答．心配してくれてありがとう．大丈夫です．がんばりますのでよろしく．ではまた！