数学序論１ (特別講義) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
２００２年5月３１日の分

問． $\forall a \exists b : P$ と $\exists b \forall a : P$ の違いが，いまいち分かりません．// 記号 $\forall, \exists$ の使い方が良くわかりません．正確にいうと，$\forall, \exists$ の順番がどうなのかわかりません．

答． こんにちは石川剛郎です．今回は数学序論１の特別講義ということで，皆さんと一緒にクイズを解き，最後に質問書を出してもらいました．熱心に聞いてくれて感謝します．さて回答ですが，確かに，$\forall, \exists$ の順番は注意が必要です．そのことを強く印象づけるために,「ジャンケン」のたとえ話をしましょう．皆さんはジャンケンの必勝法を知っていますか？それは,「あと出し」することです．ジャンケンの相手が，グー，チョキ，パーのうち任意に何を出しても，それを見てからなら，こちらが勝つように出すことができますね．相手がグーならこちらはパー，相手がチョキならこちらはグー，相手がパーならこちらはチョキを出せば勝てます．つまり「$\forall$ 相手の出し方, $\exists$ 自分の出し方: 相手に勝つ」は真です．でも,「$\exists$ 自分の出し方, $\forall$ 相手の出し方 : 相手に勝つ」は真ではありません．こちらがうまく出せば，相手が任意に何を出しても勝てる (!?) ということはありません．このように，$\forall, \exists$ の順番で，意味が違ってきます．

問． 命題などを $\forall$ とか $\exists$ を用いて表現するのが難しいです．簡単に表現するコツなどはありませんか？// 記号がうまく使いこなせません．どうしたら使えるようになりますか？記号を言葉に直して理解できません．簡単なものだと大丈夫なのですが，複雑になってくるとわからなくなってしまいます．

答． コツコツ勉強するのがコツです．ここで，なぞかけを一つ．**論理命題とかけて,「たまねぎ」と解く**．そのこころは，$\forall$(任意) や $\exists$(ある) の皮をむいていくと，中に真 (芯，しん) が残ります．最後に偽 (たまねぎの”ぎ”) になることもあります．それはともかく，ここで，**論理命題は，左から右に順に読んでいくのが基本である**，ということを確認しておきましょう．論理命題とは，真か偽かが明確に判断できる主張 (命題) を論理記号 ($\forall, \exists, \Rightarrow$ など) を使って正確に表現したもののことです．もちろん，普通の文章でも命題を書くことができて，通常は，それで十分なのですが，複雑な命題や，より正確に命題を表現したい場合に，それを論理命題に書き換えます．さて，普通の文章の場合，漢文を読むときのように書いてある順番を逆にたどって解釈しないとわからないような場合もあるのですが，論理命題の場合は，逆に読む必要がありません．というより，逆に読んではいけません．たとえば，$\forall a \exists b : P \Rightarrow Q$ は，$\forall a (\exists b : (P \Rightarrow Q))$ とカッコを付けて考えてみるとよいです．その順序を意識して普通の文章を論理命題に翻訳したり，論理命題を普通の文章に翻訳する練習をするとよいと思います．

問． $\forall a \forall f(x) : P \Rightarrow Q$ と $\forall a \forall f(x) : (P \Rightarrow Q)$ はどう違うのでしょうか？

答． 同じ意味です．(後者の方が誤解が生じづらい書き方です)．

問． 「:」や「,」の使い方がわかりません．たとえば，A と B が実数 $\Leftrightarrow A \in \mathbf{R}, B \in \mathbf{R}$ は正しいのですか？

答． 大きな区切りと小さな区切りで使いわけます．でも，あくまで，わかりやすく表現するためのものなので，それで悩む必要はありません．英語の文章でも，どこで「:」をつかい，どこで「,」を使うかを判断するのは難しいですね．それから,「A と B が実数 $\Leftrightarrow A \in \mathbf{R}, B \in \mathbf{R}$ 」という書き換え方は，カジュアルなものですが，右側の命題を「$A \in \mathbf{R}$ かつ $B \in \mathbf{R}$」とすれば正しいです.「$A \in \mathbf{R}$ または $B \in \mathbf{R}$」と解釈すれば間違いです．ですから，ここで使っている「,」は誤解のもとになるので，なるべく使用を自粛すべきでしょう．

問． ε, δ 論法がわかりません．たとえば,「$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」において，これは，$A \Rightarrow B$ の A において $\exists \delta$ を定めている状態で $\forall \varepsilon > 0$ で B が成立するのか？僕はしないと思う．ここで，僕は ε, δ 論法が分からなくなってしまいました．

答． 左から右へ順に読んでいけばわかります．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ を決めるごとに，ある $\delta > 0$ が存在して，もし $|x-a| < \delta$ ならば，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ，と読みます．ところで，x を入力とみなし，$f(x)$ を出力とみなすと，ε は出力 $f(x)$ と $f(a)$ のずれ具合について許容される精度であり，δ は，その精度を達成するための入力 x と a のずれ具合の精度です．入力の精度で，出力の精度が保証される，これが連続ということです．

問． 「$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」のとき，x が a に近いと， $f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近いと言っているだけであって，なぜ連続の定義になりえるのか，わかりません．

答． 「x が a に近いと， $f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近い」というのが，まさに連続ということです．また，x を a に近づけているのに，いっこうに $f(x)$ が $f(a)$ に近づかない，というのが不連続ということです．がんばって努力 $(x \to a)$ しているのに，なかなか思うような状態 $f(a)$ に近づけない，世の中，不連続なことも多い，ということを実感している今日この頃です．

問． 「$f(x)$ が a において，$\exists \alpha \in \mathbf{R} : \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \alpha$ を満たせば，$f(x)$ は a で $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ を満たす」と,「$\forall a \in \mathbf{R}, \forall f(x), \exists \alpha \in \mathbf{R} : \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \alpha \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$」は同じ意味ですか？

答． 正確には,「$\forall a \in \mathbf{R}, \forall f(x) : (\exists \alpha \in \mathbf{R} : \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \alpha) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$」と，括弧をつけるのが正しい書き換え方です．

問． ε-δ 論法の意味と意義がわかりません．

答． 「極限」の意味の”限りを極める”ときに ε-δ 論法が必要になります．数列の極限で説明すると，$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ ということはどういうことか，それは，番号 n を増やしていくと，a_n が a にどんどん近づいていく，と説明できますが，では，仮に宇宙人が家に遊びに来て,「どんどん近づく」とはどういうことですか？と聞いてきたら，どうするか，n を大きくすれば，a_n と a の差が，１００万分の１より小さくなる，もっと n を大きくすると，１億分の１より小さくなる，ということだよ，と答えたら，じゃあ，１兆分の１ではだめなの？と聞かれた時，そうじゃなくて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，n を大きくすればいいのさ，つまり，$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N} : m \geq n \Rightarrow |a_m - \alpha| < \varepsilon$ と答えれば，ようやくわかってくれるのです．

問． $A \Rightarrow B$ はなぜ A が偽の時，真なのですか？$A \Rightarrow B$ は，A を前提に B が起こるという事だと僕は理解している

のですが，それだと，A でなかった場合は B でなくなる，のは間違いなのでしょうか？

答． 確かに，$A \Rightarrow B$ は，A を前提に B が起こることです．でも，A でない場合は，何も主張していません．たとえば，試験で５０点未満ならば不合格，と言われて，５４点とって，やったあ，５４点は５０点未満じゃない，前提が満たされていないんだから不合格じゃない，もう大丈夫と安心していたら，不合格になって，あれ，おかしいのでは，文句を言いに行ったら，実は履修登録するのを忘れていて不合格だった，などということもあるわけです．それでも，試験で５０点未満ならば不合格，というルールは守られています．５０点以上なら合格，ということとは違うのです．このように，前提が真のときには結論が真だ，ということだけ，それだけを $A \Rightarrow B$ は主張していているのです．

問．「$\bigcap_{\varepsilon>0}(-\varepsilon, 1+\varepsilon) = [0,1]$ を示せ」の解答例の中で,「$\varepsilon > 0$ を十分小さくすると」のところがあまり厳密でないのでは？$x < 0$ または $1 < x$ として $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ の範囲に入らないような ε の値が思いつきません．// 証明でときおり見られる「ε を十分小さくとると」の十分小さくとは，具体的にはどのくらいなのですか？数学にしてはあいまいじゃないですか？

答． あいまいではありませんが，説明不足だったようですね．時間とスペースを節約するために詳しい説明を省略してしまいました．詳しく説明すると，$\varepsilon = \min\{\frac{|x|}{2}, \frac{|x-1|}{2}\}$ と具体的におけばよいです．

問． $\varepsilon > 0$ と書いたら，$\varepsilon \in \mathbf{R}$ は省略してよいのでしょうか？

答． 正確には，省略しない方が良いです．でも，省略しても誤解を生じない場合は，省略する場合も多いです．

問． クイズ「集合 $\{0,1,2\}$ から集合 $\{0,1\}$ への写像は，全部でいくつあるか？また，そのうち，全射 (ぜんしゃ．上への写像) はいくつあるか？単射 (たんしゃ．１対１写像) はいくつあるか？また，集合 $\{0,1\}$ から集合 $\{0,1,\dots,n\}$ への写像についてはどうか？集合 $\{0,1,\dots,n\}$ から集合 $\{0,1\}$ への写像についてはどうか？(n は２以上の自然数).」で，n は２以上の自然数，という条件が無ければ，場合分けは必要ですか？

答． その通りです．場合分けが必要になります．

問． 写像の定義で「… B の元 $f(a)$ がひとつ，そしてただひとつ与えられて…」とはどんな意味ですか？「B の元 $f(a)$ がただひとつ与えられ…」で良いと思うのですが，なぜ,「ひとつ」を繰り返すのですか？

答． 皆さんがよく理解できるように強調しているのだと思います．特別講義で，写像を「宅配便」にたとえましたが，その際,「送れる荷物は１つ，そこにあて先を明記」というルールを書きました．荷物にあて先が書いていないとクロネコさんは困ってしまいます．また，２つのあて先シールを貼ってしまうと，飛脚さんがどこに運んだらよいか戸惑います．あて先シールは「１枚は貼ってね，でも２枚以上は貼らないでね」ということです．

問． f が定義される時，f^{-1} は常に定義されるのですか？$f: A \to B$ が定義されるには，$\forall a \in A$ に対して B の元がただ１つそしてただ１つ定まる必要がありますが，この場合 $b \in B$ に対して A の元が１つそしてただ１つ定まる保障は必ずしもないわけで，この対応がなくても f^{-1} は定義されるのでしょうか？

答． 逆像 f^{-1} は，常に定義されます．その点で，逆写像 (同じ記号を使うので要注意) とは異なります．逆写像に関しては，質問の通りでよい理解です．でも，逆像は,「宅配便」のたとえだと,「送られた方から見た，送ってくれた人のリスト」という集合であって，写像ではなく，いつでも考えられます．

問． 異なる x の値について，y が同じ値をとる関数では，逆像とちがって，逆関数はつくれないのでしょうか？(関数の定義にはずれるから).

答． まったくその通りです．

問． 全射の意味がわからないです．

答．「宅急便」のたとえだと，配達地域 (値域，$f: A \to B$ の B の方) の全戸に荷物が届くということです．みんな荷物が届いて，全員が感謝するということです．

問． 全射というものは，$A \to B$ とすれば，A と B の要素の数が等しくならなければならないのですか？

答． そんなことはありません．たとえば，クイズに登場した，写像 $f: \{0,1,2\} \to \{0,1\}$，$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=0$, は全射ですが，定義域と値域の要素の数は等しくありません．ただし,「要素の数」を「濃度」という高級な用語に置き換えれば，無限集合の場合でも質問が成立して，A の濃度は B の濃度以上であるが，濃度が等しいとは限らない，と言えます．

問． 浪人時代に，友人に「整数と奇数どっちが多い？」ときかれました．そいつの読んだ本には「同じ」と書いてあったそうなのですが，納得いきません．その本は正しいのでしょうか？

答． 正しいです.「濃度」の問題です．整数も奇数も無限個あることに注意しましょう．整数の集合 $\mathbf{Z}$ と奇数の集合 $\mathrm{Odd} = \{2m+1 \mid m = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ の間には全単射 $\mathbf{Z} \to \mathrm{Odd}$, $m \mapsto 2m+1$, が存在するので，濃度が等しくなります．少し奇妙に感じるかもしれませんが，無限集合を扱う際によく生じる現象です．

問．「添字づけられた」という言葉がよくわかりません．

答． a_i とか，b_{ij} とか，c_λ という記号の，i や ij や λ を添字 (そえじ) と呼びます．複数ある数学的対象を列挙するときに使います．(ただし，可算個でない場合は，添字がたとえば実数上を動く場合などもあります).

問． 次のクイズの解答例を載せてください：A を $m \times n$ 型行列とする,「連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が自明な解のみを持つ」とは，この方程式を満たす n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ は零ベクトルしかないときに言う．この定義を，$\forall$ や $\Rightarrow$ などの記号を使って書き換えてみよ．

答． 解答の一例：$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. (この定義は，与えられた行列のひとつの性質に関する定義です．他にもいろいろ書き換え方があります).

問． 次のクイズの解答を解説してください：「実係数奇数次代数方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (n は奇数) は少なくとも１つの実数解をもつ」．この定理を $\forall, \exists$ などを使って，より詳しく書き換えてみよ．

答． 解答の一例：$\forall n$ (正の奇数), $\forall a_i \in \mathbf{R}(1 \leqq i \leqq n), \exists x (x \in \mathbf{R}) : x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$. (他にもいろいろ書き換え方があります).

問． ”証明せよ”という時に，どのような方法をとればよいのですか？その問題によって背理法やら帰納法などで先生

方は説明したりするのですが，その見きわめ方はあるのですか？

答． ありません．皆さん試行錯誤でがんばっています．自分が知っている証明方法をいろいろ試してみて，ああでもない，こうでもない，そうでもない，どうしよう，と試しているうちに，突然，うまくいきます．ともかく，証明方法をたくさん知っていることと，あきらめずにたくさん試してみること，これだけです．

問． 線形代数学は「線形性」をもつものの中で考えていますが,「非線形性」をもつものとは，たとえばどんなものなのでしょうか？

答． たとえば，２次関数 $y = x^2$ は線形ではありません．非線形です．

問． どうして数学の定理は，証明した人より予想した人の方が高く評価されるのでしょうか？つまり，何故いまだに「フェルマー」の定理なのですか？

答． 「フェルマーの大定理」の場合だけが特別な呼ばれ方をしているだけだと思います．もちろん,「ワイルスの定理」が正式名称です．それはともかく，それが重要な数学的事実なら，証明した人も予想した人も両方高く評価されます．予想することも大切だし，証明することも大切だからです．たとえば,「リーマンの仮説」(予想) は，まだ予想ですが，もちろんこの予想をしたことでも，リーマンは高く評価されています．

問． 自分は，”大学生としての勉強法”の域に達していません．高校の時のような練習量も豊富で解説もわりとしっかりした書物はないでしょうか？

答． いろいろあり，好みもあると思いますが，たとえば，飯高茂「微積分と集合，そのまま使える答えの書き方」講談社サイエンティフィック，は丁寧な演習書です．

問． 数学序論の学習法は？どのように予習して授業に臨めばよいのでしょうか？復習についても，宿題以外にやるべきことがあったら教えて下さい．

答． 予習はプリントをあらかじめ読んでおくと良いと思います．宿題を真剣に何度も解く，わからなかったら，教官や TA の方に質問するということで十分に復習できると思います．

問． 数学科では，何%の人が大学院にいきますか？

答． 正確には知らないので，あくまで参考情報ですが，年度によって多少変わりますが，最近はだいたい 50 %以上の人が進学するようです．

問． 高校までの数学と大学での数学にギャップが生じている原因はどんなところにあるのでしょうか？

答． ギャップがあるのが問題ではなく，ギャップがあって当然なのだと思います．特別講義で触れたように，高校までの数学は，たとえると，あくまで，ユーザーの立場の数学です．それに比べて，大学での数学は，メーカーの立場の数学が入ってきます．言い換えれば,「数学の消費者」対「数学の生産者」です．われわれは，その両方の事情を知らなければならない，それが，数学科の皆さんが社会的に必要とされている視点だと思います．数理科学が社会全般で使われている現代では消費者と生産者の両方の考え方を知っている人材が求められている．いつでも消費者としてしか考えられないとすると，それぐらいの人は社会に数多くいるので，皆さんの独自性，希少価値が少なくなるでしょう．また，逆に生産者の視点しか持てないと，数理科学を社会に真に役立てるものにすることは不可能でしょう．そのためには，まず，数学を他の人より深く知らなければいけない．人より高い視点に立たなければいけない．そして，高い視点に立つためには，どこかで飛躍が必要です．ギャップがなければ「飛躍」はありませんね．ぜひ皆さんは，このギャップを糧に，大いに飛躍してください．

問． 数学は日常生活で何の役の立つとお考えですか？講義の導入部分で，メーカー，ユーザー等の例を出されて，説明されていらっしゃた時に思いました．私は高校の数学教員を目指しております．数学にあまり興味を示さない生徒に対して，石川先生ならば，どの様に指導されるでしょうか？少なくとも，大学の数学科で学んでいる学生は数学に何らかの親しみを持っている人間ばかりです．その様な雰囲気を高校の講義に持ち込んでも上手くいくとは思えないのですが．

答． 意識していないかもしれないですが，皆さんの日常生活は数学だらけです．コンビニで買い物したり (数学を使っている)，インターネットでチケット購入したり (数学を使っている)，携帯電話で話したり (数学を使っている)，電車に乗ったり (数学を使っている)，数学の試験を受けたり (数学を使っている)，いつも数学を使っています．それが，皆さんの日常生活に真に役立っているかどうかはわかりませんが，日常生活でいつも使っています．ところで，高校で数学をどう教えたらよいか，ということですが，相手は人間なので，こちらであらかじめやり方を決めてかかると，大抵失敗するでしょう．当然，最初は試行錯誤になると思います．その際，少なくとも教員自身が数学に親しみをもっていること，数学に興味を示していることが必要条件になります．万一，教えていることに自信がなかったり，学校行政だけに関心が移ったりしたら，生徒もやる気をなくすと思います．ともかく，”めげず”に気長に努力するしかないですね．活躍を期待しています．

問． 序論のような講義は，教職の免許をとるにあたって本当に必要なのでしょうか？深く，詳しく学ぶ必要があるのですか？中学や高校で生徒に教える時に，教員の方々は，このような根本的な部分まで考えて教えているのでしょうか？

答． もちろん必要です．もちろん考えていると期待します．根本がなかったら，その植物はすぐに枯れてしまいます．それはともかく，最初からこの程度わかればいいや，詳しいことは知らなくてもなんとかなるさ，ということでは，勉強が中途半端で結局は無駄になるし，だいいち，勉強していても楽しくないでしょう．また，よく言われることですが，他の人は自分が思っている６割しか自分の実力を認めてくれないものです．ですから，そのためには，1.67 倍ほどの実力を付けなければ正当には評価されません．ところで，中学生や高校生を甘くみてはいけません．授業の中身の理解はさておき，教師の実力はすぐ見破ります.「詳しく知らないのに教えているらしい」ということだけはすぐ気づきます. (少なくとも私 (石川) の経験上)．でも，今は実力はないかもしれないけれど，がんばって努力している若い先生のことは尊敬します．数学をたとえ話で説明するかわりに，数学を使ったたとえ話をすると，何事でも，熟年になったら積分 $\int_0^t f(x)dx$ (過去の蓄積) を振り返るが，それまでは，その時々の値 $f(t)$ をできるだけ高めるよう努力しなければいけない．そのために，若いときは，微分 $f'(t)$ をできるだけ大きくするように勉強しなければいけない，ということです．まだ若いのに，積分 $\int_0^t f(x)dx$ ばかりを自慢したり，現在の値 $f(t)$ がいくら大きくても，$f'(t)$ が負では，将来がありません．日々の努力が結果を生む．というわけで，皆さんにおおいに期待しています．では，またの機会にお会いしましょう．