数学序論１質問の回答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 8 (２０００年6月１５日) の分

問. 集合 X 上の同値関係の３つの条件から，X をもれなく重複なく組み分けできる，ということが完全には納得できません.

答. 同値関係の条件は,

(1) $\forall x \in X : (x \sim x)$,

(2) $\forall x, x' \in X : (x \sim x' \Rightarrow x' \sim x)$,

(3) $\forall x, x', x'' \in X : (x \sim x'$ かつ $x' \sim x'' \Rightarrow x \sim x'')$,

ですね．集合 X 上にこの３つの条件をみたす２項関係があったら，X は同値類に分かれます．たとえば,「知り合い」という関係なら，(1) は自分自身とは知り合いだということ，(2) はある人の知り合いにとってその人は知り合いであること，(3) 知り合いの知り合いは知り合いだということです．もちろん，これはもののたとえですが，そうすると，知り合い同士にもれなく重複なく組み分けされます．そのことを一般的に証明してみましょう．(ここから詳細モードはじめ)「もれなく」とは，任意の $x \in X$ に対して，x が属する同値類がある，ということを意味しています．これは，その x を含む同値類 $[x]$ (定義は，$\{y \in X \mid y \sim x\}$) を考えれば条件 (1) から，$x \in [x]$ なので良いですね.

ところで，任意の同値類 E は，それぞれある $x \in X$ について，$E = [x]$ と表されているのですが，そのとき，そこに属する任意の $a \in [x]$ について，$[x] = [a]$ が成り立ちます．というのは，任意に $x' \in [x]$ をとると，$x' \sim x$ であり，また，$a \sim x$ なので，条件 (2) から $x \sim a$ となり，条件 (3) から $x' \sim a$ となって，$x' \in [a]$ となります．ですから，$[x] \subset [a]$ が成り立ちます．逆向きの包含関係 $[a] \subset [x]$ も同じように示されるので，証明は省略しますが，結局 $[x] = [a]$ が成り立ちます.

さて，次に「重複なく」というのは，任意の２つの同値類について，もし共通部分が空集合でなければ，それらが一致する，ということを意味しています．そのことを示すために，２つの同値類 E と F を任意に持ってきて，$E \cap F \neq \emptyset$ と仮定します．共通部分が空集合でないので，すくなくとも１つの要素 $a \in E \cap F$ があるはずですね．これは，$a \in E$ かつ $a \in F$ ということです．このとき，上でのべたことから，$E = [a] = F$ となり，２つの同値類は一致します．(詳細モードおわり)

問. 同値関係の３つの条件 (1) (2) (3) の意図がよくわかりません．たとえば，(1) が成り立ち，(2) が成り立たない，もしくは，(1), (2) が成り立ち，(3) が成り立たないような例があるのですか？

答. そのような２項関係の例はいくらでもあります．たとえば $X = \mathbf{R}$ とし，$x, x' \in \mathbf{R}$ に対し，$x \sim x' \Leftrightarrow x \leqq x'$ と定義すると，(1) は成り立ちますが，(2) は成り立ちません．実際，$x = 1, x' = 2$ のとき，$x \sim x'$ でありながら，$x' \sim x$ ではないですね．またそれとは別に，$x \sim x' \Leftrightarrow |x - x'| \leqq 1$ と定めると，(1), (2) は成り立ちますが，(3) は成り立ちません．たとえば，$x = 1, x' = 2, x'' = 3$ とすると，$x \sim x', x' \sim x''$ でありがながら，$x \sim x''$ ではありません，実際 $|1 - 3| = 2 > 1$ です.

問. $x \sim x$ が成り立たないというときはあるのですか？

答. いくらでもあります．極端な話，$x \sim x' \Leftrightarrow x \neq x'$ と定義すると，$x \sim x$ ではありえませんね.

問. 同値関係で集合を分けるとどのような利点があるのですか？とくに関数の集合などでは，そのような操作をしてもあまり意味がないような感じがします.

答. 積分の理論では，測度 (面積や体積) が 0 の集合での関数の値は，積分する際に関係しないので，測度 0 の集合を除いて一致している２つの関数は同一視して考えます．これは同値類が応用される典型的な例です．同値関係は,「同一視」ということを明確に述べるための重要な概念です.

問. 同値関係は何のために使うのですか？何か同値関係というのは他の分野とリンクされていない気がします.

答. すべての分野とリンクします.「いたるところに同値関係あり」です．身近な例として,「分数」について見直してみましょう．皆さんは，どうして $\frac{2}{4}$ が $\frac{1}{2}$ になるか説明できますか？そのためには「分数とは何か」がわかればよいですね．皆さんは気がついていないかも知れませんが，実は「分数は同値類」なんです．分数 (有理数) は次のように定義されます．まず，$X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ とし，X の２項関係を $(a, b), (a', b') \in X$ に対し，$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$ で定めましょう．これは同値関係です．(条件 (1), (2), (3) を確かめてください)．そして，(a, b) の同値類を $\frac{a}{b}$ と書くわけです．たとえば，$2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$ なので，定義から，$(2, 4) \sim (1.2)$ ですね．だから同値類 $\frac{2}{4}$ と同値類 $\frac{1}{2}$ が等しいことになります．わかりましたか？分数を使わない分野なんかどこにもないですね.

問.「代表元」の意味がわかりません．もう一度詳しい説明をお願いします.

答. 上の例で説明すると，同値類 $\frac{1}{2}$ の代表元は，$(1, 2)$ もそうだし，$(2, 4)$ もそうだし，$(3, 6)$ も，$(-1, -2)$ も $(-2, -4)$ も $(10000, 20000)$ もみな代表元です．そして，$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{10000}{20000}$ です．代表元とは，その同値類の要素というだけの意味です．それ以上の意味はありません．たとえると，同値類のすべての要素に代表としての資格がある,「被選挙権」があるということです.

問． プリントの $m \equiv m'(\mathrm{mod}.n)$ (n を法として合同) と,「m を n で割った余りと，m' を n で割った余りが等しい」ということは同じことですか？

答． その通り，同じことです．実は，同値関係のもっとも典型的な例がこれなので，同値類のことを「剰余類」とも呼ぶ次第です．

問． $=$ (イコール) が同値関係であることは定理ですか，それとも定義ですか？

答． なかなか鋭い質問ですね．定理です．もし同値関係でなかったら，等号の記号は絶対使われないでしょうね．でも定義ではなく，定義から証明できることがらです．たとえば２つの集合が等しい $A = B$ ということには定義がありましたね．その定義を使って，同値関係であることが (論理を使って) 証明されます．でも,「数」の等号の場合，あまりに馴染みすぎていて，普段はあまり意識していませんが，そしてあまり意識しなくても良いのですが，その場合も定理です．複素数が等しいということは，実部と虚部が等しいことであるし，実数が等しいということは，定義の仕方に依りますが，有理数が等しいという定義に帰着させて定義されます．有理数が等しいということは，整数が等しいということで定義されるし，整数が等しいということは，自然数が等しいということから定義されます．自然数が等しいということも，定義の仕方によりますが，定義があります．このように根本的に，さかのぼって考えることができます．さかのばって考えることができるということは大切ですが，もちろん，普段は等号が同値関係であるということは,「あたりまえのこと」として使ってよいと思います．

問． 集合の直積について，一般に $X \times Y = Y \times X$ は成り立たないということですか？

答． その通りです．$X \times Y$ と $Y \times X$ は等しいとは限りません．でも，自然な全単射 $\varphi : X \times Y = Y \times X$ が，$\varphi((x, y)) = (y, x), ((x, y) \in X \times Y)$ によって定まるので,「濃度」は等しくなります．濃度についてな序論１１で学ぶ予定ですが，実は濃度というのも同値類です．

問． 直積集合と商集合はお互いにつながりがあるのですか？

答． 単純にはつながらないでしょうね．ただし，たとえば，$X \times Y$ 上の同値関係を $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x'$ で定めるることができ，商集合 $(X \times Y)/\sim$ は X と同一視されます．でも少し強引ですね．

問． 数学を勉強するのに英語は必要ですか？

答． もちろん，英語はできた方が有利です．私 (石川) は英語が下手ですが，とにかく外国の学者とコミニュケートするための broken English は得意です．また，英語 (とフランス語) の論文は不自由なく読めます．というのは，数学の論文は，簡単な文法しか使っていないので，専門用語 (ともちろん数学の内容) さえわかれば読めるからです．専門用語も必要になったときにわかればよいと思っています．

問． 私は数学の概念を今まで恐らく１つの例外なく視覚的な像として理解しています．これは勿論人それぞれなのでしょうが，石川先生はどのような理解のされかたをするのでしょうか？４次元以上を考えるときに困惑しそうなので質問しました．

答． 私 (石川) は常に「多面的な理解」を心掛けています．一面的な理解では不十分なことが多いからです．いろいろな理解の仕方ができる方が強いですね．視覚も使うし，言葉も使うし，数式も使うし，たまには聴覚も使っています．というのは，創造の女神の声に耳を傾けているからです．でも女神さんは，なかなか肝心なことを言わないので困るんです．(これは「もののたとえ」です)．ところで,「阿修羅像」というのを知っていますか？日本史の教科書で見たことがあると思います．３つぐらいの顔を持つ像です．この回答を書いていて急に思い出しました．奈良に行く機会があったら，奈良公園内の興福寺の国宝館で公開されているので見てください．私 (石川) は，はじめて見たとき (教科書の写真とそっくりなので，ではなくて憂いを秘めた顔立ちに) 感動しました．それはともかく，４次元以上を視覚だけで理解するというのは至難のわざでしょうね．まあ，がんばってください．