数学序論１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 6 (２０００年5月２５日) の分

問． $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ には最小値がないということですが，0 ではだめなのですか？

答． 0 は最小値ではありません．というのは，0 は S に属していないからです．S の最小値は，S に属している数のうちで一番小さいもの，という定義なので，S に属していない 0 は S の最小値になる資格はありません．俗な言葉でいうと「よそもの」です．仲間はずれにしたくないときは，$T = S \cup \{0\}$ と集合 (= 世界) を広げておけば，0 は T の最小値になります．　めでたしめでたし．

問． 最大値，最小値を「〜に限りなく近い値」などとするのはどうでしょう？

答． そのような概念が「上限」や「下限」というものです．最大値や最小値とは異なる概念です．たとえば，上の質問の集合 S は $\mathbf{R}$ の部分集合ですが，S の下限は 0 です．下限は S に属している必要はありません．非常に便利な概念なので，教科書を読んでよく理解しておきましょう．

問． 上界，下界と最大値，最小値の違いを教えてください．

答．「上限，下限と最大値，最小値の違い」の書き間違いだと思いますが，上界，下界も理解してほしいので，具体例 $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ で全部の概念を説明しましょう．S の最大値は 1 で，S の最小値はありませんでしたね．まず，S の**上界**とは何でしょう？S のどの数よりそれ以上である数のことです．たとえば，2 は S の上界です．任意の $n \in \mathbf{N}$ について $\frac{1}{n} \leqq 2$ だからです．1 も S の上界です．任意の $n \in \mathbf{N}$ について $\frac{1}{n} \leqq 1$ だからです．S の上界が存在するとき，S は**上に有界**であると言います．さて，S の上界のうちで最小のものを S の**上限**と言います．つまり，集合 $\{a \in \mathbf{R} \mid \forall s \in S : s \leqq a\}$ の最小値が S の上限です．2 は S の上界ですが，そのうちで最小でないので，S の上限ではありませんね．1 は S の上界で，そのうちで最小なので，S の上限です．**下界**や，**下に有界**や，**下限**という概念は，上と同様に，ただし，不等式を反対にして定義されます．たとえば，-1 は S の下界です．任意の $n \in \mathbf{N}$ について $-1 \leqq \frac{1}{n}$ だからです．0 も S の下界です．任意の $n \in \mathbf{N}$ について $0 \leqq \frac{1}{n}$ だからです．そして，0 は S の下界のうちで最大であることが証明できるので，(証明してみてください) 0 は S の下限です．一般論として，S に最大値や最小値があれば，それらはそれぞれ S の上限や下限であることが証明できます．上限や下限は，最大値や最小値がない場合の「代用品」のようなものと考えるとよいと思います．なお，慣用として，上界が存在しないとき，上限を $+\infty$，下界が存在しないとき，下限を $-\infty$ とします．

問． 数学的帰納法の原理は実数の範囲に拡大できますか？

答． なかなか良い質問ですが，できません．たとえば，実数 $t \geqq 0$ にパラメーターを持つ命題 $P(t)$ があり，(1) $P(0)$ が成り立ち，(2) $P(t)$ が成り立てば，ある $\varepsilon > 0$ があって，$t \leqq s < t + \varepsilon$ である任意の s について $P(s)$ が成り立つ，ということから，(3) 任意の $t \geqq 0$ について $P(t)$ が成り立つ，ということは言えるか，という質問であると補足説明の文章から読み取れました．(違っていたらごめんね．) このことは正しくありません．たとえば命題 $P(t)$ として命題 $t < 1$ を考えれば，正しくないことがわかります．ただし，(2) の段階で ε が t によらずに一様に取ることができるという要請をすれば，成り立ちます．でもそれは，$\mathbf{N}$ 上の数学的帰納法と本質的に変わらないものになります．

問． $S = \{n \in \mathbf{N} \mid P(n)$ が成り立たない $\}$ とおき，最小値 m について $m - 1 \notin S$ ということだけで，$P(m-1)$ が成り立つということが言えるのですか？

答． 言えます．集合の記号の定義を思い出しましょう．$P(n)$ が成り立たない，つまり，$P(n)$ が偽であるような番号 n を**もれなく全部**集めた集合が S なのです．もれなく全部集めてきたので，$m-1$ が S に属していないということは，$P(m-1)$ が偽ではないということですね．つまり $P(m-1)$ が真である，成り立つということですね．

問． $\mathbf{N}$ の空でない部分集合に最小値が存在すると仮定し，(1) 命題 $P(1)$ が成り立ち，(2) $\forall k \in \mathbf{N} : (P(k) \Rightarrow P(k+1))$ が成り立つと仮定して，(3) $\forall n \in \mathbf{N} : P(n)$ が成り立つ，ということを示しましたが，そんなに仮定してよいのでしょうか？

答． 仮定するレベルが違うということに注意してください．ここで示したことは，一般形で書くと $Q_1 \Rightarrow (Q_2 \Rightarrow Q_3)$ という形の命題が成り立つということです．今の場合は,「$\mathbf{N}$ の空でない部分集合に最小値が存在する」が命題 Q_1 であり,「(1) かつ (2)」が命題 Q_2 であり，(3) が命題 Q_3 です．さて，命題 $Q_1 \Rightarrow (Q_2 \Rightarrow Q_3)$ が成り立つ (真である) ということを示すにはどうすればよいでしょうか？そうですね，Q_1 が成り立つと仮定して，$Q_2 \Rightarrow Q_3$ が成り立つ，ということを示せばよいですね．では，$Q_2 \Rightarrow Q_3$ が成り立つということを示すにはどうすればよいでしょうか？そうですね，Q_2 が成り立つということ仮定して，Q_3 が成り立つということを示せばよいですね.「ならば」の定義にしたがって考察しているだけのことです．単純ですね．数学と他の学問を比べると，数学は若い人に向いている学問であると言われています．それは数学が「単純な学問」だからです．なんだかわけがわからない秘められた約束ごと，長年の経験を積み重ねないと到達できない奥義，というものは数学にはありません．(実はどこにもないのかもしれません)．ともかく，数学でやっていることは，結局，単純なことの組み合わせ方だけです．ただし，最終的には論理的に破綻していない組み合わせであることが少なくとも必要です．その上で，どういう斬新な組み合わせ方を考えられるかということ，柔軟な感性と豊かな直感に根ざした勇気ある選択こそが，数学を押し進めている原動力なのです．

問． 数学的帰納法で,「$n = k$」の部分を 「$n \leqq k$」と換えたものも，帰納法として定義されますか？

答． されます.「$\forall n \in \mathbf{N} : P(n)$」という型の命題を示したいけれど，それをそのまま数学的帰納法で証明しづらい場合に，(1) $P(1)$ が成り立つ，ということと，(2') 任意の $k \in \mathbf{N}$ について，$(\forall n(n \leqq k) : P(n))$ を仮定すると $P(k+1)$ が成り立つ，ということを示すということがよくありますね．これは，新しい命題 $Q(n)$ として $\forall k(k \in \mathbf{N}, k \leqq n) : P(k)$ というものを考えて，それに数学的帰納法をあてはめたということになります．簡単な工夫ですが，なかなか有用な方法ですね.

問． S が集合のときも $\forall S \subset \mathbf{R}$ と使えるのですか？

答． 使えます．$\forall S(S \subset \mathbf{R})$ という意味です.

問． $f : S \to T, g : U \to V$ の合成写像は，$T = U$ でなければ成り立たない気がします．もし違うなら，なるべく簡単な具体例をお願いします.

答． $T = U$ であればもちろん良いのですが，$T \neq U$ でも，f による S の像 $f(S)$ が U に含まれていれば，合成写像が定義できます．簡単な具体例：$S = \mathbf{R}, T = \mathbf{R}, U = [0, \infty), V = \mathbf{R}$ とし，$f(x) = x^2, g(y) = y$ とすると，合成写像 $(g \circ f)(x) = x^2$ は定義できますね.

問． 背理法で命題を示すときの条件の扱いがしっくりきません.

答． 質問の補足説明の文章をよんで，なるほど，と思いました．ともかく，$\forall x : (P(x) \Rightarrow Q)$ と $(\forall x : P(x)) \Rightarrow Q$ が違うということに注意すればよいと思います.

問． $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ ならば $Q \Leftrightarrow R$ ということが成り立ちますか？

答． 成り立ちません．たとえば P が偽の命題ならば，$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ は Q, R が何であれ真になってしまいます．推測すると，すべての命題 P について $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ ならば $Q \Leftrightarrow R$ ということは成り立つか，という意味だと思います．それなら OK です．なぜなら P として Q を選べば，$(Q \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$ で，$Q \Rightarrow Q$ は真なので，$Q \Rightarrow R$ は真です．同様に P として R を選べば，$R \Rightarrow Q$ も真であることがわかります．結局，$Q \Leftrightarrow R$ が導かれます．あまり論理に深入りしたくないのですが，でもいい加減に扱うわけにはいかないので答えました.

問． 写像は「トロッコ」のようなものですか？

答． よくわかりませんが，写像は「宅配便」のようなものと言った方が感じがでると思います．"集荷地区"の各戸から荷物 (１つだけとしましょう) を，"配達可能地区" の範囲内のその荷物に書いてある住所のところに配達します．写像が定義されている，ということは，荷物に配達可能地区内の住所が１つだけ書いてあるということです．住所が書いてなかったり，１つの荷物に２つ住所が書いてあると，配達する人が困りますね．単射ということは，２つ以上の荷物が配られる家庭はない，つまり，１つか，0 か，ということで，全射ということは，配達可能地区の全戸に荷物が届くということです．全単射ということは，配達可能地区の全戸に１つずつ荷物が届くということです．この場合，集荷地区の戸数と，配達可能地区の戸数は一致しますね．それから，写像の合成は，もらったお歳暮をよそにまわす，といったところですか.

問． 恒等写像の意味がよくわかりません.

答． 宅配便のたとえでいうと,「本日休業」ということです．なにも動かさないということです．(この場合，集荷地区と配達可能地区は同一です).

問． 単調な関数は単射ですか？

答． そうです．詳しく言うと，関数 $f : I \to \mathbf{R}$ (ただし I は $\mathbf{R}$ の区間) が狭義単調増加ならば f は単射です．ここで，f が狭義単調増加 (あるいは強い意味で単調増加) とは，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ であることを言います.

問． ワークシート No.3 の解答例で，$x \notin [0,1]$ より $1 < x, 1 < \lambda < x$ となる λ をとると $x \in [0, \lambda)$ となるというのがわかりません.

答． 質問の部分は，背理法の中のことです．つまり，$x \notin [0,1]$ ということと，$x \in \bigcap_{1<\lambda} [0, \lambda)$ ということが両立しない，矛盾を導くということを示す部分ですね．$x \in \bigcap_{1<\lambda} [0, \lambda)$ という仮定から，$0 \leq x$ ではあるので，$x \notin [0,1]$ より $1 < x$ が導かれます．すると，$1 < \lambda < x$ となる λ をとれますが，その λ について，($x \in \bigcap_{1<\lambda} [0, \lambda)$ という仮定から) $x \in [0, \lambda)$ であるはずだから，矛盾が導かれるということです.

問． ワークシート No.3 で，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \subset [0,1]$ と $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \supset [0,1]$ の両方を示さなくてはならないのですか？

答． $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda = [0,1]$ を示す，ということなので，そうです．集合が等しいということの定義をもう一度思い出しましょう．もちろん，等号を簡単に直接証明できる場合もありますが，その場合でも両方の包含関係が成り立っているわけで，暗にその両方を示しているわけです.

問． 演習 No.6 で，１回総当たりのリーグ戦で，引き分け試合がなく，順位が完全についたとするとき，１位が全勝しているとした理由がわかりません.

答． $k+2$ チームが１回総当たりするので，各チーム $k+1$ 試合を行いますね．また，引き分けがなく，順位が完全についたという仮定から，勝ち数は，$k+1$ から 0 まで１チームずつ並んでいることがわかります．なぜなら，２チーム以上が同じ勝ち数なら，その２チームは同じ順位になるはずだからです．したがって，１位チームは $k+1$ 勝していると結論されます.

問． 証明問題はどこから手をつけてよいのかわかりません.

答．「問題文を書き直す」ということを自分でするとよいかな，と思います．問題文に出てくる言葉の定義を思い出し，たとえば図式化などして，何を示したら証明できるのかということを確認すれば，その次に

どうすれば良いかが見えてくると思います．

問．講義と全然関係ないのですが,「ハム・サンドウィッチの定理」とは何ですか．数学のどの分野で使うのですか？

答．どんな形の (ハム１枚と上下のパンからなる) ハム・サンドウィッチも包丁で必ず２等分できる，といった定理です．実は「トポロジー」という分野があり，トポロジーの大切な定理で,「不動点定理」というものがあって，それから導かれる定理です．不動点定理はいろいろな分野に応用され非常に重要なのですが，不動点定理のそれ以外の身近な応用というときに話題になるわかりやすい定理がハム・サンドウィッチの定理です．どうしたらそんなことが証明できるのか考えてみるとおもしろいと思います．

問．命題と定理の違いは何ですか？

答．実は「命題」には２つの意味あいがあります．１つは論理のところで説明した「真偽が判定できる陳述」というものであり，もう１つは「ある体系の中で真である陳述」というもので，定理だが重要度の比較的低いものを意味します．同じ「命題」という用語を使っていますが，違う意味です．

問．数学的帰納法の証明よりも，どうしてこういう証明の仕方が思いつくのかの方が気になります．僕は公式を勝手に作る時がありますが，それはたまたまの思いつきです．

答．どうして証明の仕方が思いつくか，ということは，どうして英語が話せるか，ということに似ています．勉強して慣れてくると自然に話せるようになる，としか言いようがないですね．まあ，なんでも上達のコツは夢中になってがんばる，ということでしょう．

問．数学的演繹法はありますか？

答．ものを考える方法に,「帰納」と「演繹」があり，数学的帰納法があるから，数学的演繹法もあるか，ということですね．おおざっぱに言うと，帰納は，具体的なものから抽象的な結論を導くものであり，演繹は，抽象的な結論を具体的なものにあてはめる，ということですね．ですから，数学の証明法としては，ほとんどのものが演繹法と言えるかもしれませんね．

問．数学の教科書の読み方について質問します．普通，数学の教科書は「定義」→ 「定理」→ 「証明」の順で，続いていきますが，どれくらいのレベルまで読み込めばよいのかよくわかりません．つまり，(1)：定義の暗記，(2) ：(1) + 「定理」の文の理解．(3) ：(1) + (2) + 証明の理解．(4) ：(1) + (2) + (3) + 定理の暗記．(5) ：(1) + (2) + (3) + (4) + 証明を自力でできるまで読み込む．といったレベルのうちどこまでやればよいのでしょうか？個人的には (3) + 有名な定理を覚える，程度がバランスが良いと思います．また，それなら，証明は１回よんで理解できたら忘れてもよいのでしょうか？全部覚えることは不可能です．覚えた方がよい証明といったものもあるのですか？

答．なるほど．それから，(6) 定理を自力で発見する．(7) 定義を自力で与え，理論を展開する．といったレベルもあります．ともかく,「どれくらいのレベルまで読み込めばよいのか」ということは個人の能力と意志に関わる問題なので，私 (石川) がそこまで介入するつもりはありません.「できるレベルまで読みこんでください」としか言いようがないですね．それから，証明は１回よんで理解できるということはほとんどないと思いますが，もちろん忘れてください．忘れて，しばらくしたらまた読んでみてください．昔理解したと思っていたことが違っていたり，新しい発見があるかもしれません.「忘れるために読む」ということが良いのかもしれませんね．

問．数学が発展，進歩したということはどういうことですか？どうなることですか？

答．確かに物理などの他の科学と比べて，数学の発展ははっきり見えないかも知れませんね．何をもって，数学の発展と考えるか，ということはもちろん個人差がありますが，私 (石川) は,「新しい視点の確立」ということが数学に限らず，学問一般が発展するということであると考えます．たとえば，物理の「ニュートン力学」「マックスウェルの電磁気学」「量子力学」「特殊相対性理論」「一般相対性理論」は，みな「新しい視点の確立」ですね．数学の「ユークリッド幾何」「無限小解析」「非ユークリッド幾何」「ベクトル空間の理論」「リーマン幾何」「位相幾何」「群論，環論，体論」「ルベーグの積分論」「超関数論」「スキーム理論」などなど，すべて「新しい視点の確立」です．物理の場合，物質世界という特別な世界を説明するための理論なので，新しい視点でも，現実を説明しない理論は淘汰され，生き残る理論の数は少なくなります．数学は，物質世界を説明するための理論ではなく，その背後にある「数理世界」という，より広い世界を説明するためのものなので，自己矛盾がないかぎり，多くの理論が「正しい」と受け入れられた状態で永久に生き残ります．しかし不思議に，歳月を経て，以外な応用が見つかることがあります．ファイバー束の理論が素粒子理論に応用されたり，リーマン幾何が相対性理論に応用されたり，いたるところ微分可能ではないという関数に関する理論がフラクタル理論として再構築される，というふうに，単純に知的好奇心を満たすために発展した数学の理論でも，現実世界にも応用されることがあります．

問．質問がないときはどうすればよいのでしょうか？授業がバッチリ理解できて質問がないときは書かなくても良いのですか？

答．すでに言ってあるように，質問を書かないと評価しません．授業がバッチリ理解できたかどうかは，質問してくれないと，こちらには伝わりませんね．質問が一つも浮かばないということは，実は何も理解できていないということかも知れません．そんなことはないと思うので，講義を聞いて連想したことでも何でもよいから質問してください．とにかく,「これだけのことをわかっている」ということを，こちらに伝えてください．質問が出来るぐらい良く勉強してください．ではまた．