数学序論１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ４ (２０００年5月１１日) の分

問． 写像の定義は「S の各要素に T の**１つの要素**を対応させる規則」ということになっていますが，たとえば，$f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ という関数 (写像) は１つの x に対して $f(x)$ はいくつかの値をとります．こういうものは写像とは呼ばないのですか？

答． 微分積分の講義で $\mathrm{Sin}^{-1}, \mathrm{Cos}^{-1}, \mathrm{Tan}^{-1}$ などの逆３角関数 (アークサイン，アークコサイン，アークタンジェント) は，１つの値 (主値) を指定するということを習うと思います．たとえば，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の場合，関数 $y = \sin x$ を $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲に制限して，その逆関数として定義されるわけですね．したがって，この講義で説明した意味の写像になるわけですね．

問． 関数は写像であると言うことはできるのですか？

答． できます．関数というのは写像の特別な場合です．target が $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の場合，写像を関数とよぶ場合が多いようです．

問． S の各要素といいますが，S の集合の要素の数が特定できないときは，写像は定義できないのですか？

答． そんなことはありません．ともかく，S のどの要素にも対応先を T の中に確定してあげれば写像を定義したことになります．極端な例ですが，T を,「ただ１つの要素からできている集合」とすれば，S がどのような集合であろうと，S の各要素の対応先は確定できるので，そう確定すれば，S から T への写像が定まります．

問． 写像をイメージして考えるのに，わかりやすい方法を教えてください．

答． イメージ (image，像) をイメージすると良いかも知れません．確かに，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像 (１変数関数) については，平面上の曲線 (グラフ) によって視覚化でき，$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への写像 (２変数関数) は，空間上の曲面 (グラフ) によって視覚化できますが，それ以外の場合は，直接的に視覚化するのは難しいですね．たとえば，パラメーター付けられた平面曲線 ($\mathbf{R}$ (あるいは $\mathbf{R}$ 内の区間) から $\mathbf{R}^2$ への写像) や，空間曲線 ($\mathbf{R}$ (あるいは $\mathbf{R}$ 内の区間) から $\mathbf{R}^3$ への写像) や，空間曲面 ($\mathbf{R}^2$ (あるいは $\mathbf{R}^2$ 内の領域) から $\mathbf{R}^3$ への写像) は写像の像で表現されます．そして，その対応関係を明確にするために，さらに定義域の一部分が，どういう像を持つかということを見ていくと，写像を理解しやすくなります．また，写像を調べるために，いろいろな部分の逆像を調べるという手段もあります．ただし注意してほしいのは，たとえ視覚化できなくても写像を十分に理解できるようになることも必要だ，ということです．たとえば，$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の最小値や最大値について，図示できてもできなくても，すぐにわかりますね．(最小値 0, 最大値なし)

問． $\Leftrightarrow$ 同値と，$=$ 等しい，の正確な違いがよくわからないので教えてください．

答． $\Leftrightarrow$ は命題だけに使い，$=$ は数や集合や写像などに使うので，全く違うものです．集合 A, B に対して，$A \Leftrightarrow B$ とは絶対使いません．

問． 補集合は “バー” ではだめですか？S^c と $\overline{S}$ の違いは何ですか？

答． 高校では補集合を $\overline{S}$ と書くと習った人が多かったようですね．S^c と $\overline{S}$ は同じものです．どちらを使ってももちろんよいです．ただし $\overline{S}$ といった記号は，これからは他の意味でも使うことがあるので，万一「$\overline{S}$ は何ですか？」と聞かれたら,「S の補集合です」と答えられるようにしましょう．ついでに,「全体集合は何ですか？」と聞かれたら,「◯◯です.」とすぐ答えられるときに補集合の記号は使いましょう．まあ，単に記号の問題で，記号は「うわべだけのこと」なので，あまり気にしなくてもよい問題です．

問． “否定” と “補集合” は感覚的に同じものと思いがちなのですが，それではだめですか？

答． 類似性を見つけることはすばらしいことですね．ただし，命題と集合は違うので，混同しないようにしましょう．

問． $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$ はド・モルガンの法則そのものじゃないですか？

答． そうです，講義でも言ったように，教科書にも書いてあるように,「ド・モルガンの法則」とよばれています．当たり前のように使う事実ですね．しかし，ここでは，いままで説明してきた論理法則に基づいて，集合の法則を導いているのだということを理解してください.「論理あっての集合」です．(「命あってのものだね」の “もじり”です．) 皆さんは大丈夫と思いますが，高校で習ったことは証明ぬきで信じて，それ以外のことは受け付けない，ということになると危険なので，注意しましょう．ところで，以前，この講義を，高校数学と大学数学を結ぶ「渡し船」にたとえましたね．渡し船に乗船する際は，皆さんが高校までに身に付けてきた重い荷物は，できれば川に捨てるか，別便で送ってください．(捨てても無くなったりしないから心配無用です)．そうしないと渡し船が沈没して，なかなか大

学数学の岸にはたどり着けないかもしれませんね．別のたとえをすると，黒板いっぱいに書かれた文字は，一度消さないと，新しい文字は書けない，ということでしょうか．

問． 集合の話は，この先どんなことにつながっていくのですか？

答． すべての基礎になります．皆さんは今後 (あまり意識しないかもしれませんが) 毎日つきあうことになります．

問． $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の λ や Λ というのはいったい何ですか？

答． Λ は添字集合で，λ は添字です．たとえば，数列は，a_n などと書きますが，この場合 n は添字で，添字集合は $\mathbf{N}$(自然数全体の集合) です．それと同じような書き方です．添字の種類はいろいろありうるわけです．

問． $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は，λ の値が $\lambda\in\Lambda$ の中で変化して，その共通部分ということですか？ $\lambda\in\Lambda$ であるすべての λ についての共通部分ですか？

答． その通りです．

問． $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の読み方は？

答． たとえば,「すべての S_λ たちの共通部分」ではどうでしょうか？

問． $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda=\{x \mid \forall\lambda\in\Lambda : x\in S_\lambda\}$,$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda=\{x \mid \exists\lambda\in\Lambda : x\in S_\lambda\}$ とありますが，感覚的には $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ のほうが領域が広いから $\forall$ のような気もします．

答． 感覚的に考えてばかりいると間違える，ということです．ともかく上が共通部分や和集合の定義です．右辺で左辺を定義します．もともと左辺に意味はなく，右辺によって意味をはじめて付与する，と考えてください．そして，この定義を採用したので，それをもとに論理的に考える必要があります．「感覚も大切だが，論理も大切」という姿勢が，現代社会ではますます望まれているんでしょうね．

問． $\exists\lambda\in\Lambda : x\in S_\lambda^c \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda^c$ と式をもっていくのはちょっと強引すぎる気がします．

答． 強引ではなくて，これしかない，と思います．というのは，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の定義は，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda=\{x \mid \exists\lambda\in\Lambda : x\in S_\lambda\}$ であり，それ以外にはないから，この定義をもとに考えるしかないですね．そして，この定義を S_λ の代わりに，S_λ^c にあてはめれば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda^c=\{x \mid \exists\lambda\in\Lambda : x\in S_\lambda^c\}$ ですね．そして，集合を記述する記号 $\{x \mid P(x)\}$ の定義 から，$x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda^c \Leftrightarrow \exists\lambda\in\Lambda : x\in S_\lambda^c$ ですね．このように定義しか使っていませんね．Going my way.

問． λ も Λ も「ラムダ」と言っていますが，これは小文字と大文字なのですか？

答． そうです．ギリシャ文字です．また，Λ は論理記号の $\wedge$ (「かつ」の記号ですが，この講義では使わないし，たぶん他の講義でもめったに登場しない) と紛らわしいですが，使用する場所が違うので，区別がつくと思います．

問． cap と cup は区別しにくいというか，まちがいやすいと思いませんか？

答． 同感です．間違いやすいですが,「しゃれ」というか「もじり」というか「地口 (じぐち)」のたぐいなので，ほっときましょう．共通部分と和集合，英語なら，intersection と union でよいでしょう．

問． 図で証明するのはダメですか？

答． 図では証明になりません．図示することは確かに大切なのですが，図はあくまで証明の補助手段ですね．証明のことは別としても，図でわかったと思ったことは，いろいろな具体例を通して，２重３重に理解し直すという習慣をつけましょう．

問． 初回の講義で習った $\overline{\forall(\text{条件}) : P} \Leftrightarrow \exists(\text{条件}) : \overline{P}$ となることが，改めて疑問に思いました．条件文の中に使われている言葉なのに否定をすると変えなければいけないという記号やフレーズは $\forall$ や $\exists$ の他にもあるのでしょうか？

答． 改めて疑問に思うということは非常によいことですね．質問についてですが，$\forall$ や $\exists$ は，条件文の中にはありません．条件文の外にあって，特別な位置にあります．通常の数学をするかぎり，命題の否定の作り方については，講義でのべたことだけ押さえておけば十分です．

問． 一意性と一意的の違いは何ですか？

答． 一意性は名詞であり，一意的は形容詞です．一意性は「ただ１通りであること」，一意的である，は「ただ１通りである」ということです．

問． 空集合は，どの集合の空集合であるか明言しなくてもよいのですか？

答． しなくてもよいです．というのは，空集合というのは１つしかないからです．“同じ”空集合が，すべての集合の部分集合であるわけです．空集合は神出鬼没と言えます．ちなみに「空集合はすべての集合の部分集合である」ということや,「空集合というのは１つしかない」ということは，空集合の定義と，集合の包含関係，集合の相等の定義からすぐに証明できることがらです．証明をつけてみてく

ださい．

問．“$\subset$” と “$\in$” の正確な違いがいまいちピンときません．

答．$A \subset B$ は A が B の部分集合であることを表し，$x \in B$ は x が B の要素であることを表しますね．たとえば，$B = \{1, 2, 3\}$ で，$A = \{1, 2\}$ とすると，$A \subset B$ であり，また，$1 \in B, 2 \in B, 3 \in B, 1 \in A, 2 \in A, 3 \notin A$ です．

問．背理法で証明できない問題があるというのは本当ですか？質問書回答 No.3 で「背理法でないと証明できない問題もあります」とありますが，それは経験から言ってそうなのですか？それとも，そのようなことが証明されているのですか？

答．経験からです.「背理法でないと証明できない問題もあります」は論理的でなくて失言でした．ややインパクトがなくなりますが,「背理法を使えば証明できる問題があります」と書くべきでした．ところで,「証明できないことを証明する」ということは難しいですね.「証明できないことを証明できることが証明できないことを証明できる」などといった主張についても考えることは可能ですが，そうすると「証明する」ということの意味を真剣に考えなくてはならなくなりますね．哲学的な話題は私(石川) も嫌いではありませんが，ここでは触れないことにします．

問．線形代数で言う「次元」と，物理で扱う「次元」は同じものなのですか？

答．物理で扱う次元には，私 (石川) が知る限り２種類あり，１つは「自由度」の意味で使い，１つは「単位」の意味で使います.「自由度」は，物理で素朴に (いい加減に) 扱われてきたものですが，線形代数で言う次元によって明確に定義することができます．一方,「単位」についてですが，これは，長さの単位が m で，面積の単位が m^2 で，体積の単位が m^3 で，速さの単位が m/sec で，加速度の単位が $\mathrm{m/sec}^2$ であるなどと言ったことですが，これは数学では基本的には扱いません．(もちろん物理の問題との関連を研究するときには扱いますが．) どちらかというと，数学は，単位と無関係な真理を探究することで発展してきた，という歴史的経緯があります．古い例になりますが，９世紀頃は，たとえば $x^2 + 21 = 10x$ という２次方程式は，面積と関係づけて解かれていました．(現代でも小学校で教えるとしたらそうするでしょう．x という記号ももちださないでね．) しかし，１６世紀ぐらいになると，抽象化が進み，皆さんの御存じのような２次方程式の解の公式が，面積などとは無関係に扱われるようになりました．つまり他の問題にも応用可能となり，汎用性が拡がったわけです．もちろん，ここからが物理，ここからが数学という明確な区分はなく，その境界領域は，非常に魅力的な研究対象なわけですが，その一方で，数学と物理が目指す方向性においての本質的な違いを，ここに垣間見ることができると思います．

問．“裏” を使って証明することは大学では必要ですか？(再掲)

答．「裏」とは何か私 (石川) は知りません．誰か教えてください．と，前回回答しましたが，同僚の先生から,「裏」とは「逆の対偶」のことであり，高校で習うことだ，と教えてもらいました．勉強になりました．それを踏まえて，回答を改めて書き直すと，裏は逆と同値だから，それを使って証明することは無理であり，無駄である，逆を証明してももとの命題を証明したことにはならない．無意味である，大学であろうと，高校であろうと，無理であり無駄であり無意味である，となります．こんな答でいかがでしょうか？

問．今日，和集合，差集合が出てきましたが，和，差ときたら積集合，商集合，もありそうな気がします．数学は拡張好きなので．もしあったら，それはどのような集合で，そのような集合を考えることによって，どういうメリットがあったのかなど例をあげてください．なかったら別にいいのですが.

答．あります．なかなか良いセンスをしていますね．少し安直な発想であるとも言えますが，このような発想は大切にしたいですね．実は，積集合や，商集合については，あとで講義で触れる予定です．そのためのプリントもすでに作ってあります．関係ないですが，質問の最後の「なかったら別にいいのですが」というのは少し弱気 (なげやり) ですね．

問．現在使っているこの教科書は最後までやるのですか？

答．最後まではやらないと思います．教科書を「最後までやる」ということに私 (石川) はあまり意義を感じません．初回の講義で説明したように，この講義は，皆さんを大学の数学へ渡す渡し船です．大事なことをくり返しくり返し，角度をかえて説明していこうと思っています．教科書は，あくまでそのための教材として使っています．そして皆さんも，わからないことや納得いかないことは，くり返しくり返し，角度をかえて質問してください．そして，みんなが大学数学の岸に渡り終わったら (人によっては船が沈没して漂流してなんとかどこかの岸に漂着するといったところかも知れませんが)，それでこの講義の目的は達せられます．めでたしめでたし．

格言集．「論理あっての集合」「写像がわかれば数学がわかる」「数学はひとつ」「数学は拡張好き」