数学序論１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 3 (２０００年４月２７日) の分

問. 集合の説明で，(S が集合という場合) $x \in S$ (属する)，$x \notin S$ (属さない) の一方が真で，一方が偽であることが定まっている，ということですが，集合に真とか偽とかあるんですか？

答. 命題 $x \in S$ が真か偽かということです．つまり，x が S に属しているか，属していないか，が決まっている，という意味です．

問. 空集合は集合ではないのではないですか？

答. すべての x について $x \notin S$ が真，$x \in S$ が偽と定まっているので，立派な集合ですね．

問. 空集合の $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in S)$ が納得できません．空集合は「属する要素のない集合」なのに,「$x \in \emptyset$」という表現ができるのはなぜですか？

答. 表現はできるけれど,「$x \in \emptyset$」という命題は，どんな x についても偽ということです．

問. $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in S)$ が真なのは，$x \in \emptyset$ が偽だからですか？また，この命題は $\forall S \supset \emptyset$ が真であるのと関係があるのですか？

答. その通りです．なお，$\forall S \supset \emptyset$ という表現は，より正確には，$\forall S$(集合) : $S \supset \emptyset$ などと書きますね．その省略形として許される範囲でしょう．

問. $\{x \mid P(x)\} = \emptyset \Leftrightarrow \forall x : \overline{P(x)}$ とありましたが，$P(x)$ をみたす x がないとはどういうことですか？例が知りたいです．

答. たとえば，$P(x)$ として，命題「$x \in \mathbf{R}$ かつ $x^2 = -1$」を考えましょう．この命題が真であるような x は存在しませんね．したがって，$\{x \mid x \in \mathbf{R}$ かつ $x^2 = -1\} = \emptyset$ です．

問. $\emptyset$ にはどのような使い方があるのですか？

答. たとえば，実数の区間の共通部分を考えるとき，$[0,1] \cap (1,2] = \emptyset$ などと使います．

問. 記号 $\subseteqq$ の意味は？

答. $\subset$ と同じ意味で使います．

問. “裏” を使って証明することは大学では必要ですか？

答. 「裏」とは何か私 (石川) は知りません．誰か教えてください．

問. 教科書では “$\Rightarrow$” を “: ” に直していますが，前回もらったプリントには，“: ” は「ついて」と読んで,「ならば」とは読まないと書いてあります．だとしたら，“$\Rightarrow$” にも「ついて」という意味があるのでしょうか？

答. 違います．確かに，命題 $\forall x(P(x)) : Q(x)$ は，$\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$ と書き換えられます．(教科書 p. 12 参照)．しかし，良く見ると，単純に “$\Rightarrow$” を “: ” に直しているわけではないことに気が付くと思います．実際 “: ” は，両方に書いてありますね．読むとすると，$\forall x(P(x)) : Q(x)$ は,「すべての x，ただし $P(x)$ をみたす x，について，$Q(x)$ が成り立つ」，$\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$ は,「すべての x について，$P(x)$ ならば $Q(x)$」となります．やはり，“: ” は「ついて」です．なお，命題 $\exists x(P(x)) : Q(x)$ の方は，$\exists x : (P(x)$ かつ $Q(x))$ と書き換えられます．この場合,「ならば」は全然出てきませんね．$\exists x(P(x)) : Q(x)$ は「ある x，ただし $P(x)$ をみたす x，が存在して，$P(x)$ が成り立つ」，$\exists x : (P(x)$ かつ $Q(x))$ は「ある x が存在して，$P(x)$ かつ $Q(x)$ が成り立つ」と読めます．ともかく，“: ” は「ついて」と考えれば間違いはありません．

問. 「一般性を失うことなく」の意味がわかりません．もっとわかりやすい (高校２年レベル) の例で示してください．浪人中に一度だけこの言葉を使用したら，先生に「一般性がない」と言われたことがあります．

答. ここは高校ではないので，高校２年レベルの例で示す必要はないですよね．教科書 p. 18 の説明を参照してください．

問. 「$\sqrt{5}$ が無理数である」という命題には前提は書いていないので，$\sqrt{5}$ が有理数と仮定して矛盾を導いたのは，単に排中律を使っただけの気がします．この場合前提とは,「実数の公理が成り立つ」といった根本的なことなのでしょうか．でも，それだと何か大げさな気がします．こんな場合でも「背理法」というのでしょうか？

答. なるほど．でも，質問の文章にもあるように，明記されている前提はないが，仮定すべきことは暗黙のうちにすべて仮定して証明しているわけなので，この場合も背理法とよんでよいと考えます．まあ，単に言葉使いの問題であって，本質的なことではないですが．

問. 高校でも「$\sqrt{5}$ が無理数であること」の証明をやりました：「背理法で示す．$\sqrt{5}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{5}$ は有理数であり，$\sqrt{5} = \dfrac{b}{a}$(a, b は互いに素な整数) とおける．これより，$b = \sqrt{5}a$．両辺平方して $b^2 = 5a^2$．この式より，b^2 は 5 の倍数であることがわかる．このとき b も 5 の倍数であり，$b = 5m$(m は整数) と表される．このとき $b^2 = 25m^2 = 5a^2$ から，$5m^2 = a^2$．この式より，a^2 は 5 の倍数であるから，a も 5 の倍数であり，$a = 5n$(n は整数) と表される．ここで，a も b も 5 の倍数であることは，a と b が 5 の倍数であることに矛盾する．従って，$\sqrt{5}$ は無理数である.」この方法と，今日やっ

た方法は，似ているんですが微妙に違います．どちらがより本質に迫ったやり方なのでしょうか？

答． よく覚えていますね．感心しました．もちろんどちらも正しい方法で，本質的には違いはありません．ちなみに，高校の証明では，たとえば,「b^2 が 5 の倍数なら b が 5 の倍数である」ということを使っていますが，このことは，素因数分解の一意性から示されることがらです．どちらかというと，講義 (教科書) で説明した証明は「正攻法」であり，高校での証明は「巧みな方法」と言えます．２通りの証明を比較すると高校での証明はわかりやすく，それに比べると，講義の証明は少しわかりづらいかもしれません．でも慣れてくると，正攻法が簡単に思えてくると思います．

問． 今日の方法の中で，$a = 5^{f_0} p_1^{f_1} \cdots p_\ell^{f_\ell}$ と素因数分解するところがありましたが，$f_0, f_1, \ldots, f_\ell$ を 0 も許してしまうなら，素数というのは無限にあるだろうから，この $p_1, p_2, \ldots$ というのも無限にあることになってしまうのでしょうか？

答． なるほど，するどいですね．確かに素数は無限にあります．ですから，すべての素数を書いてもよいのですが，指数が 0 なら書いても書かなくても同じですね．ここでは，a と b のどちらかの約数になるような素数だけを明示したわけです．ところで，素数が無限に存在することは，ユークリッドが最初にそれを証明したそうです．知っていますか？どうやって証明するでしょうか？

問． 素因数分解の一意性とは具体的にどういうことですか？証明しなくてもよいのですか？

答． 素因数分解とは，自然数を素数の積の形に表すことです．教科書 p. 25 を参照してください．その際 1 は素数の仲間には入れないので，まず，2 以上の自然数を考えましょう．たとえば，$6 = 2 \cdot 3$ と素因数分解されます．6 は素数ではありません．2 や 3 はこれ以上分解できないので素数です．$16 = 2^4$, $35 = 5 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$，などは素因数分解の例です．この分解の仕方は掛ける順序をのぞいて１通りに表されますね．当たり前すぎてわかりづらいかもしれませんが，たとえば，$35 = 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ という分解の仕方しかありません．それが「一意的」ということです．ただし，このままだと 1 は素因数分解できないことになるので，素数をすべて考えて，そのかわり指数は 0 も許すことにすれば，すべての自然数 n は，$n = p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} \cdots p_\ell^{f_\ell} \cdots$ と１通りに表されます．ただし，$p_1, p_2, \ldots, p_\ell, \ldots$ は素数であり，$f_1, f_2, \ldots, f_\ell, \ldots$ は 0 以上の整数で，有限個の番号を除けば 0 です．たとえば，$6 = 2^1 3^1 5^0 7^0 11^0 \cdot$ といった具合です．また，すべての 0 でない整数 m は，$m = \varepsilon p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} \cdots p_\ell^{f_\ell} \cdots$ と表されます．ここで，$\varepsilon = \pm 1$ です．このような分解も素因数分解とよびます．もちろん，素因数分解の一意性も証明すべきことですが，ここではそれを認めて，それを使って他の定理の証明をしました．

問． 「一意性」の意味がよくわかりません．

答． 「一通り」ということです．たとえば,「解の一意性」とは解がただ１つしかないということです．

問． 反例が思い付かないときはどうすればよいですか？

答． 実は私 (石川) も困っているのですが，証明しようと努力しているうちに反例が見つかることもあります．

問． $\mathbf{N} = \{x \mid x$ は自然数$\}$ という書き方は良いのですか？

答． x は個々の自然数で $\mathbf{N}$ は自然数の全体の集合なので，これで良いと思います．

問． 公理と定義はどのような違いがあるのですか？

答． 確かに両方とも証明しないで認めることがらですね．定義は，言葉や概念をすでに定まっているものから定めるものであり，公理は，議論や理論の大前提を定めるものです．しかし，公理や定義を定める定め方 (つまり理論を展開していくやり方) には，いろいろある場合があります．たとえば教科書 p. 65 の「アルキメデスの公理」は，それを公理とよぶわけですが，他の命題を公理として採用し，その公理から導くことができます．(問題 2.7 を参照)．したがって，その場合は，公理ではなく定理なのですが，昔からの呼び名で，公理とか原理とか法則などとよばれている数学の定理も多いようですね．

問． 高校の背理法の代表例は,「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」，大学の背理法の代表例は,「自然数の濃度 $<$ 区間 $[0,1]$ の濃度」と高校時代の先生から聞いたのですが本当ですか？

答． なるほど．でも，高校の背理法，大学の背理法という区別は本当はないし，何が代表例かということも難しいですね．ともかく，背理法で証明するという方法は強力であると言うことは確かです．ちなみに,「自然数の濃度 $<$ 区間 $[0,1]$ の濃度」の証明 (カントールの対角線論法) は序論１１の講義で学ぶと思います．

問． 無理数の記号はありますか？

答． とくにありませんが，無理数全体の集合は,「差集合」の記号を使って，$\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ で表されます．

問． 整数全体の集合の記号 $\mathbf{Z}$ は何を意味しますか？$\mathbf{Q}$ は何の頭文字ですか？

答． $\mathbf{Q}$ は quotient (商) の頭文字だと思います．$\mathbf{Z}$ については詳しく知りませんが，Zahl (ドイツ語の「数」の意) の頭文字でしょうか．

問． x と χ は何が違うのですか？

答． どちらも「エックス」の意味で使ってもちろん良いのですが，ギリシャ文字の「カイ」を χ で表すので，紛らわしいから，多くの人は (私 (石川) も) x を使います．

問． $\mathbf{R}^2$ は２次元だというけれど，３次元になると $\mathbf{R}^3$ となるのですか？

答． その通りです．n **次元デカルト空間**は $\mathbf{R}^n$ です．これは，n 次元数ベクトル空間でもあります．

問．証明の中では，どこまでを “明らか” として証明しなくても良いのですか？

答．難しい質問ですね．もちろん，なるべく詳しい証明を付ける，どんなことにも証明を付けるのが理想ですが，現実的には,「時間」と「スペース」と「難易度」と「重要度」と相談して決める，ということになると思います．その証明のなかで大切で難しいと考えられる部分をまず証明して，易しい部分は,「時間」と「スペース」があれば証明を付け，なければ，やむをえず省略したり，引用で済ませたりします．

問．$r+\alpha$ が無理数でないと仮定したすぐ後に，$r+\alpha \in \mathbf{Q}$ と書いていましたが，α, r は実数であるから，$r+\alpha \in \mathbf{R}$ だから $r+\alpha \in \mathbf{Q}$ というニュアンスのことは証明中に明記する必要はないのですか？

答．明記した方がよりよいです．私 (石川) の書いた解答例でそれを省略したのは,「時間」と「スペース」の制約のためです．証明というものは手間と暇をかければ，限りなく改良できますね．

問．背理法でなくても証明できるのですか？

答．たしかに背理法でないと証明できない問題もあります．それ以外の証明法，たとえば数学的帰納法，もあります．

問．証明問題を解くとき,「$\mathbf{Q}$ の重要な性質 (1) より」,「問題 1.6 より」というような書き方はよいのですか？

答．あまり勧めません．仮に，持ち込み可のテストなどであっても，答案にそのような形で引用するのは，できれば避けたいことです．それよりも，使う定理や主張などを証明の中に手短かに再現して,「数学的帰納法の原理と，$\mathbf{N}$ の空でない部分集合に最小元が存在することが同値であるから」とか,「有理数は加減乗除に関して閉じているので」と書いた方がよいです．たとえばその証明を読む側の視点を想像すると,「$\mathbf{Q}$ の重要な性質 (1) より」,「問題 1.6 より」などと書かれても，何のこっちゃ，ということになりかねませんが，根拠を簡潔に再現してあれば，とても読みやすいでしょうね．

問．今後，自分でどの様に勉強したら良いのですか？

答．そうですね．どんな方法がよいか，ということには個人差がありますが，たとえば，(1) 教科書の問題をまず解こうとしてみる．つぎに，(2) その問題に出てくる用語の定義を覚える．つぎに，(3) 定義をその問題にあてはめて書き直してみる．つぎに，(4) 書き直した問題を解こうとしてみる．つぎに，(5) 気分転換をして頭を冷やす．つぎに，(6) 他の科目の勉強をする．つぎに，(7) 一晩寝る．つぎに，(8) また問題を解いてみる．これをくり返すと，不思議に問題が解け，理論もわかるようになっていきます．このとき意識的にやっていることは，ただ「定義を覚えて問題にあてはめる」「ある程度時間をかける」ということだけです．語学の勉強法とも通じるものがありますね．ちなみに講義でも触れたように,「数学語」というのがあって，それをマスターすると数学の理解がぐっと深まります.「大事なことは少しずつわかる.」

問．「創造的模倣」の「創造的」とは何を意味するのですか？

答．新たにものを作る (造る，創る) ことです．ですから,「創造的模倣」とは，まねをしながら，その中で新しいものを見い出していこうという前向きな行為ですね．まねをしているうちに，偶然でも何かが見つかる，まねをしないと何も見つからない，ということでしょうか．皆さんとともに理力がありますように．(これは村上春樹の小説に出てくるフレーズの模倣です)．

問．ワークシート No.1 の問題で，どうして意味を考えずにやるのですか？

答．命題の否定を作る規則に関する問題であり，意味 (数学の中身，この場合，関数の連続性) とは無関係な問題だということです．あまり気にしないでください．問題を解くこととは別に，意味を考えること自体は，もちろん個人の自由です．

問．数学の分野にはどんなものがありますか？この前の１年生の研修旅行のとき，“代数幾何” とか “整数論” とかの数学の分野名らしきものが出てきたのですが，他にどんな分野がありますか？また，どんな内容をしているのか，簡単に教えてください．

答．簡単に教えることは難しいです．分野としては他に，位相幾何学，微分幾何学，複素関数論，特異点論，表現論，関数解析学，偏微分方程式論，代数解析学，力学系，確率論，などなど，書き切れないぐらい多くの分野があります．合宿研修で配られた，数学の分野の英語のリストを参照してください．たとえば私 (石川) の専門で言うと,「実代数幾何」「特異点論」という分野があります．どんな内容かというと，実代数幾何は，多項式の等号や不等号で定まる図形や関数の研究で，たとえば実代数曲線をいろいろな枠組みから調べます．たとえると「まる」の研究です．特異点は図形や関数の特異な点，特徴的な部分，の研究で，微分解析や解析幾何などを駆使して組織的に調べます．たとえると「へそ」の研究です．でもこれじゃ，よくわかりませんよね．詳しいことは遠慮せずに直接聞きに来て下さい．そして，いろいろな先生にも聞いてまわることをお薦めします．ところで，現代では，数学もこのように細分化されてはいますが，(というより，分れているそれぞれの分野自体も巨大化しているので，“巨分化” とでも呼んだほうが感じがでますが)，でも**数学はひとつ**であり，思い掛けないことが思いもよらないところで関係したり役に立ったりして，そこからアイディアが生まれ，創造できるし，おもしろい，という面があることに注意しましょう．皆さんのように若くて頭の柔らかいうちは，視野を狭めず，貪欲にいろいろなことを学んだ方が結果的には良いと思います．(もちろん，勉強している最中には，そのことに集中しなければなりませんが)．ではまたね．