数学序論１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １ (２０００年４月１３日) の分

問. P が偽のとき，なぜ $P \Rightarrow Q$ が真なのかわかりません．もし，それを偽としたときに，何か不都合なことが起こるのであれば，それはどんなことですか？

答．そう決めると，論理的思考をする場合に非常に都合が良いからです． 皆さんが違和感を持つのは，日常的に使っている意味と少し違うからで，もちろん当然と思います．たとえば,「テストで５０点未満ならば不合格です.」と私 (石川) が宣言したとして，(この講義ではテストはしない予定ですが)，テストが６０点で不合格になったら，皆さんは「話が違う」と文句を言うでしょうね．それは,「テストで５０点未満ならば不合格」と言った時点で,「５０点以上だと合格」と常識的に解釈するからですね．もちろん日常生活ではこれで良くて，そうじゃないと，面倒なことになるわけです．しかし，数学では厳密な推論をしなければならないので,「逆も真なり」とか「一事が万事」などという格言は認められていません．つまり，数学の世界では,「テストで５０点未満ならば不合格」と言っただけなら，たとえば，100 点とったのに不合格であっても，話は矛盾しないことになります.「テストで５０点以上とれば合格，５０点未満だと不合格」と言ってはじめて正確になるわけです．数学では，厳密さが大切です．(でも,「へ理屈」と言われかねませんね．世間モードか，数学モードか，ということをわきまえる，つまり，TPO が大事ということでしょうか．) ところで，$\forall x \in \mathbf{R} : x \geqq 1 \Rightarrow x^2 \geqq 1$ ということは，皆さんも，数学での正しい命題であると認めますね．すべての実数 x について,「$x \geqq 1 \Rightarrow x^2 \geqq 1$」は真ですね．このとき，もちろん，逆 (正確には，逆の対偶) 「$x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$」という命題については，何も言っていません．(実際，これは偽ですね．) それはともかく，すべての実数 x について,「$x \geqq 1 \Rightarrow x^2 \geqq 1$」は真なので，とくに，$x = -1$ の場合にあてはめると,「$-1 \geqq 1 \Rightarrow (-1)^2 \geqq 1$」も真ですね．$-1 \geqq 1$ は偽で，$(-1)^2 \geqq 1$ は真であることに注意しましょう．また，$x = 0$ の場合にあてはめると,「$0 \geqq 1 \Rightarrow 0^2 \geqq 1$」も真ですね．そして，$0 \geqq 1$ は偽で，$0^2 \geqq 1$ も偽であることに注意しましょう．この例から，$P \Rightarrow Q$ の真偽の自然な定め方が，推測できるのではないでしょうか.

問. P が偽のとき，$P \Rightarrow Q$ が真だとすると,「僕が北大に入学していないならば，地球は存在しない」というような文も真となって，あまり納得がいきません．納得いくように説明してください.

答. 君が北大に入学しているとしましょう．(それは確かですよね)．そして，北大に入学していないと仮定して，そのとき地球が存在するかどうかが問題となるわけですね．ところが，君が北大に入学していながら入学していないと仮定しているわけだから，これは，矛盾したことを仮定しているわけで．その時点で，いわばフィクションの世界に入ってしまったわけです．矛盾した仮定からは，どんなことでも導かれます.「地球が存在しない」ということも導かれます．こんな説明ではどうでしょう？

問. $P \Rightarrow Q$ の真偽は P と Q の内容によって変わるのでは？

答. 内容ではなく，P と Q の真偽だけから定まります．この点がキーポイントです．内容とか，意味とかは，P や Q が真か偽かということに影響するだけで，P, Q の真偽がいったん決まったら，P, Q が何であれ，自動的に $P \Rightarrow Q$ の真偽が定まるわけです．余計なことは考えなくてよい，極めてドライな (乾いた) 世界です.

問. P が偽であるとき，$P \Rightarrow Q$ という命題は存在するのですか？

答. 「存在する」ということがどういうことか，ということは難しいですが，ともかく考えることができるのは確かですね．そして，P や Q が命題ならば，それらの真偽から，$P \Rightarrow Q$ の真偽を定めた (自然に定まった) ので，$P \Rightarrow Q$ も命題であるということになります.

問. 命題 P と命題 Q が全く無関係である場合，たとえば，P :「人間は哺乳類である」，Q :「$1+1=2$ である」となっている時，あるいは，P :「私が山をのぼる」，Q : 「彼女が川をくだる」となっている時，P “ならば” Q である，という命題で，P であるという条件は全く効いてこず，$P \Rightarrow Q$ が真であるとか，偽であるとかの結論は出せないのではないでしょうか？

答. 関係があるとか，無関係である，ということは曖昧なことですね．人間は哺乳類であるから，数学が生まれ，$1+1=2$ ということも考えられた，のかもしれません．君が山へ芝刈りに行き，彼女が川へ洗濯に行ったとすると，桃太郎の話だから，無関係とは言えないでしょう．それはともかく，そういうことは気にしない，ということが数学の特徴です．大事なことは，P と Q の真偽が決まれば，P, Q が何であっても，$P \Rightarrow Q$ の真偽が決まるということ，それだけです.

問. 「P または Q」 の真偽の決め方がわかりません.

答. P と Q が両方とも偽であるとき,「P または Q」は偽です．それ以外の場合は,「P または Q」は真です.

問. 「:」は「ならば」で置き換えられますか？

答. 「ならば」とは意味がちがいます.「について」ですね．たとえば $\forall x : P(x)$ の場合は,「すべての x について $P(x)$ が成り立つ」，$\exists y : P(y)$ の場合は,「ある y について $P(y)$ が成り立つ 」と読むと良いと思います.

問. 真偽表は約束ですか？直感では何も言えません.

答. その通りです．約束ですが，だれかが勝手にきめたものではなく，世界標準の歴史に根ざした約束です．講義で説明している「形式論理」は，いわば，人類が長い間苦労して築き挙げた知的財産とも言えます．直感も大事ですが，論理も大事です．両方大事です．

問. $P \vee Q$ や $P \wedge Q$ や $\overline{P}$ というような論理記号は使わないのですか？

答. $P \vee Q$ は P または Q です．$P \wedge Q$ は P かつ Q です．$\overline{P}$ は P の否定ですね．否定の記号は使いますが，$\vee$ や $\wedge$ は，この講義では使わない予定です．でも皆さんは使っても構いません．

問. 講義で出てきた以外の論理記号はありますか？

答. 記号は作ればいくらでも作れますが，通常使う標準的なものを，講義で紹介しているわけです．

問. 論理記号は，誰がいつ頃つくり，どのくらいあるのですか？

答. 今まで疑問に感じませんでした．誰が考えたんでしょうね．ぜひ調べて，ぜひ私 (石川) に教えてください．

問. 論理記号は絶対必要ですか？全部文章で書いてもいいのでは？

答. 大学の数学の学びはじめのときは，論理記号を使って厳密に推論することは，絶対必要と思います．それをするかしないかで，数学がわかるか，わからないか，決定的な差が出ると思います．しかし，一方では，論理記号を使った推論や，計算などを，普通の文章に書き直すこともできる，そして人に説明できる，ということも大切なことです．変なたとえですが，論理記号を使った推論は,「英語」であり，文章を使った推論は,「日本語」であって，英語をいちいち日本語に訳して理解するより，英語のままで理解できたほうがよい，でも，それを日本語で表現できなければ，通訳にはなれない，といったところでしょうか．ともかく，両方の能力を身に付けたほうが断然良いということですね．

問. $\forall$ と $\exists$ はなぜ逆なのですか？そのまま，A や E と書けば，みんなもっとわかると思いますが．

答. でも，たとえば行列の記号で，A とか E が出てきますね．そうすると，$AA : EA = A$ が何を表しているか，わかりませんね．非常に紛らわしくなってしまいますね．やはり $\forall A : EA = A$ でしょうね．

問. 「すべての」と「任意」は完全に同じものなのですか？「すべての」は all の A をとって $\forall$ となるとのことですが,「任意の」は any の A をとって $\forall$ とすると聞いたことがあります．

答. 数学的には区別しません．

問. なぜ実数を表すのは $\mathbf{R}$ なのですか？

答. real number の頭文字ですね．どうして太文字にするかは，慣習としか答えられませんね．ところで，$\mathbf{R}$ という記号が定着したのは，そう古いことではないと思います．

問. 「$\geq$」とは何ですか？「≧」と同じような感じだと思うのですが．

答. 同じです．私 (石川) も「$\geq$」も「≧」も両方使っています．

問. $\prod$ (積の記号) という記号が，別の講義で出てきたのですが，どのような記号ですか？内積の「積」と積分の「積」はどんな違いがありますか？

答. たくさんのものを掛け算するときの記号です．(足し算の場合の Σ に相当します．たとえば，$\prod_{n=1}^{10} n$ は 10! を意味します．積は掛け算の意味です．内積の「積」も同じ意味あいです．しかし，積分の「積」は，掛け算というよりは，積る (つもる) という意味でしょう．

問. 教科書以外にやっておけばいいなと思うものは？物理などをやっているときに，時々数学でわからなくなるので，早めに対処しておきたいと思います．

答. 個人差があるので，アドバイスしかねます．わからなくなったら，どう調べたらよいか，そのつど質問してはいかがでしょう？

問. 関係ない質問ですが，３次関数の変曲点を通り，傾きが同じ直線は，接線なのか，交わっているのかわかりません．

答. ３次関数のグラフの変曲点での接線についてですね．接線であり，かつ，交わっています．高校では,「交わる」という用語と,「共有点をもつ」という用語を区別して使っていたかも知れませんが，大学では，区別することはないと思います．

問. 4 次元というのはどのようなものですか？

答. どこにでもある，ありふれたものです．皆さんのデータ，たとえば，身長，体重，年令，脚の長さ，を数値にして並べたら，4 次元ですね．何も，縦・横・高さ・時間に限ることはありません．たとえば線形代数で扱っている次元は，単にデータの種類の数であり，無色透明，何にでも応用できる，という普遍性があります．言い換えれば，縦・横・高さ・時間といった変数に固執することなく，他のどんな状況でも応用できるのです．数学の長所の一つに，意味から自由である，ということがあります．今皆さんが勉強していることは，抽象的だからこそ応用範囲が広いのです．

問. 先生はどんな人なんですか？

答. と聞かれても，自分のことはわかりませんね．ただのおじさんです．講義することは楽しいので，楽しそうでしょうね．(次回からは，講義内容 (少なくとも数学) と関連することだけに答えることにします．悪しからず．)

回答者から. 疑問点は，遠慮なく何度でも質問してください．可能な限り答えます．また，予習復習の際に思い付いた質問なども歓迎します．その際，詳しい説明があると答えやすいですね．ではよろしく．