「写像空間のトポロジーと幾何と特異点論」
(幾何学続論１，幾何学講義７) 質問に対する回答

２００４年１２月１７日の分 担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にこのような形で回答します．文体を (です，ます調に) 統一するために，また，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，講義の参考資料や回答書は，今後,
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html
に載せる予定です．参考にしてください．

問． 微分構造の定義のところで「$k : S \to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ k が連続写像で，任意の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to S$ に対して，合成 $k \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級」とありますが，“任意” だから定義として成立する，ということでしょうか？たとえば，X, Y, Z を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像，$g : Y \to Z$ を連続写像とするとき,「$g \circ f$ が連続ならば g が連続」は成り立ちませんが,「任意の連続写像 f について $g \circ f$ が連続ならば g が連続」というような形の定義であると解釈してよいのでしょうか？

答． あけましておめでとう．今年もよろしく．酉 (とり) 年なので，飛躍の年になるようお互いおおいに努力しましょう．さて，回答ですが，その通りです．有限次元多様体 Λ も任意としているところがミソです．定義域 Λ も有限次元多様体である限り任意であり，写像 $h : \Lambda \to S$ も C^∞ 級である限り任意です．数学の一般的な理論をつくるときには良く使う手法です．ところで,「任意の連続写像 f について $g \circ f$ が連続ならば g が連続」という部分ですが，f の定義域 X が任意であれば，$f = \mathrm{id}_Y : Y \to Y$ とおけば正しいことがわかります．また，定義域 X が固定されているとすると，成り立つかどうかは，X に依存します．たとえば，X が１点からなる空間なら，$g \circ f : X \to Z$ はいつでも連続であるので，Y が１点からなる空間でない限り，成り立ちません．

問． 例 4.16 の証明で，M とか Q は固定しているのでしょうか？

答． 固定していません．任意にとっています．

問． “parametric” とはどういう意味ですか？数学のいろいろな分野でときどき聞く言葉ですが，何のことかわかりません．日本語の訳と，意味を (簡単に説明できることなら) 教えてください．

答． カタカナで「パラメトリック」と言います．この言葉は「パラメータ」(parameter) から来ています．訳は「助変数」や「媒介変数」です．たとえば，単位円を $x = \cos t, y = \sin t$ と表して調べるのが，parametric method です．

問． 授業で取り扱っている以外の微分構造の入れ方について，もう少し詳しく教えてください．写像空間に微分構造を入れるのに，授業でやったような方法で定義をするのは自然な流れだと思いました．この微分構造の入れ方以外に，他にどのような入れる方法があるのですか？

答． いろいろあります．概念の導入というものは，もちろん目的に依ります．それはともかく，空間の微分構造を定義するには，その空間上の関数が「微分可能」ということを定義しなければいけません．たとえば関数空間上の関数 $\Phi(f)$ の微分可能性について考えます．(ここで，f は関数で，その関数空間がベクトル空間であって，さらにノルム $|f|$ が定義されていて，通常のノルムと同じ性質を持つとします．たとえば，Φ が Banach 空間上の関数の場合)．微分の定義を思い出して，各 f に対し，$\dfrac{|\Phi(f+h) - \Phi(f) - \Phi'(f)(h)|}{|h|} \to 0, (|h| \to 0)$ となるような (h に関して) 線形な関数 $\Phi'(f)$ が存在する場合に Φ を微分可能と定義します．(少し複雑にはなりますが) 同様に，C^r 級関数が定義され，C^∞ 級関数の概念も定義されます．この筋で，いわゆる **Banach 多様体**の概念が定義されます．

問． 多様体を固定したとき，どれくらい商空間に微分構造が入りますか？

答． 微分構造の入れ方 (定義) によりますが，われわれの定義では，一意的に微分構造が定義されます．

問． どんな時，Milnor の本に書いてある定義と授業の定義が同値になりますか？

答． $\mathbf{R}^n$ の部分集合 S に対して,「関数 $k : S \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級」ということの定義で，定義 M「S の開近傍上の C^∞ 関数に拡張できる」と，定義 G「S の任意の C^∞ パラメータ付けに対し，合成が C^∞ 級」の関係についてですね．明らかに「定義 M $\Rightarrow$ 定義 G」が成り立ちます．逆は一般に成り立ちませんが，たとえば，S のある開近傍 U の C^∞ レトラクト $r : U \to S \subseteq \mathbf{R}^n$ があれば，$k \circ r$ が k の C^∞ 拡張を与えるので，そのような S に対しては「定義 G $\Leftrightarrow$ 定義 M」が成り立ちます．

問． V-manifold は orbifold と一般によばれているということですが，V-manifold の「V」は何の略なのでしょうか？orbifold とよばれているものは，多様体として扱うには何かマズイことがあるのでしょうか？

答． 残念ながら多様体にはならないので，つまり「特異点」(多様体でない部分) を持つので，V-manifold (V-多様体) とか orbifold (軌道体) などと呼びます．V は “Variety”(ヴァライティー) の略です．ちなみに，フランス語で “variété” というと (特異点のない) 多様体 (manifold) のことですが，英語の variety は，特異点を持つかもしれない空間の総称です．それに，V という文字が，尖った感じを良く表していますね．(佐武一郎先生のセンスが現れています)．

問． 特異点とは何ですか？特異点というものがいろいろなところ (幾何や複素解析，数学科の掲示板な

どの講義) で見かけるのですが，定義はみな違うのですか？(どれも微分できなさそう，というのは共通しそうですが)．他学部の学生がそう聞いてきた場合，どう答えたらよいのでしょうか？

答．「特異点は特異な点のことだ」と答えてください.「ただし，数学では，意味が明確で厳密な定義を与えなければいけないので，場合場合によって定義が異なってくるんだよ」と答えてください．それはともかく，ある理論があって，その理論が適用できないような対象にかかわるのが特異点である，ということは，どの場合でも同じです．特異点を理解すれば，その理論の本質の理解が深まるし，特異点を克服すれば新しい理論ができるという具合です.

問．写像空間を考えて写像の分類などを行った人として，R.Thom の話はよく聞きます．しかし，ホイットニー位相という名前から，このように写像空間を考えたのはホイットニーの時代より前だと思いました．初めて写像空間を提唱したのはどのような目的があったのか知りたいです.

答．写像空間を考えること自体は自然な流れだと思いますが，それをつかって写像の分類を考えたのは Whitney が最初だと思います．目的は，多様体を理解することと，多様体と多様体の間の写像を良く理解するためだったと推測されます.

問．$\mathbf{R}/\sim$ と $\mathbf{R}_{\geq 0}$ はもっと簡単に diffeo とは言えないのでしょうか？

答．そう感じるのも仕方ないですが，残念ながらもっと簡単には言えません．なぜなら，**講義で一番簡単な証明を紹介**したからです．詳しく証明をつけすぎたかもしれませんが，ともかく，定義に基づいた，一番ていねいな証明を紹介しました．数学という学問は，**誰にでもわかる**，ということを目指しているので，ていねいに証明を付ける，ということは避けて通れません．もちろん，“雑な”証明でよければ，もっと証明は短くできるのですが，誰にでもわかる証明をつけるとなると，どうしても長くなります．これは，たとえると，９０分の”サッカー”(他のものでもよいですが) の試合を観戦するか，３分の速報を見るかの違いです．結果を知るだけなら，速報で十分ですが，サッカーの醍醐味は，やはり試合を見ないとわからない．(実際に自分でサッカーをやる方がわかるが，とりあえず，サッカーとは何かを知るには，ゲームを見ないといけない)．それから，ゲームのルールがよくわからないと，試合を見てもつまらない．まずルールを理解する必要があります．数学の場合は定義．変な例え話をして恐縮ですが，ともかく，もう一度，定義と証明を読んで楽しんでみてください.

問．「数理解析のパイオニアたち」という本を知っていますか？

答．知っています．アーノルドの書いた良い本ですね．読むと，ニュートンの偉さがわかります．フックやホイヘンスやバローの偉さもわかる．アーノルドの偉さもわかります．(ちなみに，バローはニュートンの先輩，テイラー展開のテイラーはニュートンの弟子です．テイラー展開などのべき級数は，ニュートンが使いこなした武器だったので,「ニュートン展開」と呼ぶべきかもしれません)．われわれはもっと古典に親しまなければならない，ということを示唆しています．(実は，拙者は昔,「数理科学」という雑誌にこの本の書評を書きました).

問．写像空間で微分構造として exotic なものをもつようなものはありますか？この講義で与えている微分構造は parametric な方法で与えています．よく目にする多様体上の微分構造は違う形になっています (chart を貼り合わせる)．この parametric な方法による微分構造を入れて写像空間を分類したくなる動機がよくわからないです． homeo だけではだめなのですか？ homeo であって， diffeo でないものはありますか？

答．同相であって微分同相でないものはたくさんあります．ところで，写像空間の微分構造を考える第一の動機は「**美しいものは皆，写像空間の特異点である**」という美学にあります．そして，“空間の特異点” というものを捉えるには，どうしても微分構造が必要になります．もちろん，位相的な特異点というものもありますが，それだけでは一般に不十分です．たとえば，$y = |x|$ のグラフは $\mathbf{R}^2$ の図形として，位相的には特異点を持ちませんが，微分構造を考慮すれば原点が特異点であると認識できます．これから講義の中で，たとえば,「**正三角形は特異点である**」ということを説明する予定です．実は，写像空間の位相構造だけで微分構造を考えないと，正三角形と二等辺三角形を区別できなくなるし，だだの三角形とも区別できなくなります．正三角形を美しいと感じることができるのは，われわれが，写像空間の微分構造を直観的に認識しているから，かも知れません．ところで，exotic な微分構造という場合には，意味のある定式化ができるかそうかが難しいところです．(たとえば，無限次元 Banach 空間の球面には exotic なものがない，といった良く知られた結果の意味を，もう一度見直す必要があると思います)．それから，chart の貼り合わせ，との関係ですが，たぶん，この講義で導入した対象は，代数幾何でいうと，affine algebraic variety の定義をしていることにたとえられると思います．一般の algebraic variety はいくつかの affine algebraic variety の貼り合わせとして定義されます．このたとえで言うと，われわれは，１つの写像空間の商として表されるものだけを考えている，それらを貼り合わせて得られる対象まではまだ考察していない，という具合です.

コメント．錐のつくりの部分 (隹) は，“とり”または “ふるとり” と呼ぶそうです．// 妻に錦糸卵を禁止されました.

コメントへのコメント．ありがとう．トリ年にふさわしいですね．それから，錦糸卵を禁止されたのは，コレステロールのトリ過ぎだから？ちらし寿司や冷やし中華には欠かせない，ええ具 (egg) なのに残念ですね．ではまた.