「写像空間のトポロジーと幾何と特異点論」(幾何学続論１，幾何学講義７) 質問に対する回答

２００４年１１月５日の分 担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にこのような形で回答します．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，講義の参考資料や回答書は，今後，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html
に載せる予定です．参考にしてください．

問． C^∞ **位相**と**ホイットニー** C^∞ **位相**の関係はあるのでしょうか？

答． あります．位相の生成元について $W(r, U) \subseteq W(r, K, U)$ が成り立つので，C^∞ 位相よりホイットニー C^∞ 位相の方が強い位相です．$C^\infty(N, M)$ について，N が compact なら，同じ位相になりますが，N が compact でないときは，ホイットニー C^∞ 位相の方が本当に強い位相です．

問． C^r 位相と Whitney C^r 位相の使い分けについて質問します．「**こういった事を調べるには，この位相を使う**」といった具体的な例をお願いします．

答． **写像の大域的な安定性**を考察するときには，”無限遠” の状況も考慮しなければいけないので，Whitney 位相を用います．**写像の局所的な安定性**に注目する場合は，コンパクト集合上での写像の挙動のみに注目するので，通常の C^r 位相を考えれば十分です．

問． Whitney C^0 位相が**第１可算公理**を満たさないこと，**一様収束の位相**よりも強いことの理由がわかりません．

答． $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ の場合に説明します．一様収束の位相は，$f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \varepsilon > 0$ について，$B(f, \varepsilon) := \{g \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ という集合たちで生成される位相です．つまり，f のグラフの ε 幅に入るようなグラフを持つ関数 g の集合，というものが一様収束の位相に関する f の開近傍です．この場合，ε は x に依らない正の定数ですが，$\eta = \eta(x)$ を x の正の連続関数として，$B(f, \eta) := \{g \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid |g(x) - f(x)| < \eta(x)\}$ の形の集合は，Whitney C^0 位相に関する f の開近傍になります．このとき，$\eta(x) > 0$ ですが，$\inf\{\eta(x) \mid x \in \mathbf{R}\} = 0$ でもよいことに注意しましょう．このとき，いくら定数 $\varepsilon > 0$ を小さくとっても，$B(f, \varepsilon)$ は $B(f, \eta)$ に含まれないので，一様収束の位相は Whitney C^0 位相より真に弱い位相，Whitney C^0 位相は一様収束の位相より本当に強い位相です．また，$\mathbf{R} \times \{0\}$ を含む可算個の開集合 $U_i \subseteq \mathbf{R}^2, i = 1, 2, \ldots$ に対して，連続関数 $\eta(x) > 0$ であって，$\{(x, y) \mid |y| < \eta(x)\}$ がどの U_i にも含まれないようなものが構成できるので，Whitney C^0 位相は，可算個の基本近傍系を持たないこともわかります．

問． r-jet の定義で出てきた「共通の chart」という表現がよくわかりません．多様体上に局所座標を１つとり，それを f と g のそれぞれにあてはめる，ということですか？

答． そうです．より正確にいうと，f, g に対して，$f(x_0) = g(x_0)$ かどうかまず調べ，$f(x_0) = g(x_0)$ のとき，$y_0 = f(x_0) = g(x_0)$ とおき，点 $x_0 \in N$ のまわりの chart をとり，$y_0 \in M$ のまわりの chart をとり，その chart に関して，f も g も局所表示して，偏微分係数を比べる，ということです．もし，１つの共通な chart に関して偏微分係数が等しければ，別な共通の chart に関しても偏微分係数が等しくなるので，chart のとりかたによらずに同値関係が定まります．

問． r-jet の話は**同値類**と言われても，全くイメージがわかりませんでした．

答． まず，$N = \mathbf{R}^n, M = \mathbf{R}^m$ の場合に考えると，f と g が点 x_0 で同じ r-jet を定めるということは，f と g の (通常の座標に関して)r 階までの偏微分係数がすべて等しいということです．どれかの偏微分係数が違えば同値でない，ということです．偏微分係数たちが一致すれば同値，一致しなければ同値でない，ということは，f の同値類は，f の x_0 での r 階までの偏微分係数たちをすべて並べたベクトルそのものと同一視できますね．ですから，デカルト空間 $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の場合は，今まで説明してきた jet と同じものになります．多様体の場合も「**ジェットは同値類だ**」と割り切ってしまえば，ジェットの概念が楽々導入できる，ということです．そして，チャートを１つ決めておけば，その範囲内で，同値類 (すなわちジェット) が，偏微分係数たちを並べたものと同一視できる，ということも当然成り立ちます．

問． 多様体の**局所座標**の座標軸は無限に延びているのですか？$\mathbf{R}^2$ の x 軸，y 軸の様に「目もり」がいくらでも遠くにとれるものですか？

答． 局所座標は，$\mathbf{R}^n$ の開集合，たとえば $\mathbf{R}^2$ の開集合, という設定で考えるので，有界にとどまるものも考えています．有界なものも考えておく方が便利だからです．(ただし，無理矢理座標をとりなおして，座標が $\mathbf{R}^2$ 全体を動くようにすることは可能です．たとえば，与えられた $\mathbf{R}^2$ の開集合の各点 (x_0, y_0) の回りで，領域 $|x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon$ の範囲に座標を制限しておいてから，$X = \tan(\dfrac{\pi(x - x_0)}{2\varepsilon}), Y = \tan(\dfrac{\pi(y - y_0)}{2\varepsilon})$ と変換すれば，(X, Y) 平面では $\mathbf{R}^2$ 全体が座標平面になります．)

問． **１点からなる空間**が 0 次元 C^∞ 多様体ということでしたが，１点に局所座標系が描けるというイ

メージがわきません．

答． 極端な場合なので，無理をしてイメージを湧かす必要はありません．とにかく，１点は $\mathbf{R}^0$ ですから，０次元多様体の定義の条件をすべて満たしているので，０次元多様体です．ところで，１点というものは，すべて同相な位相空間です．１点からなる集合への位相の入れ方がただ１通りです．点はみな平等です.「天は点の上に点を作らず，点の下に点を作らずと言えり」です．

問． 多様体の間の写像 $f: N \to M$ が**連続**という定義について確認をお願いします．

答． 多様体の定義の中に「位相空間であって...」ということが含まれているので，N や M には位相がすでに入っています．したがって，写像 $f: N \to M$ が連続ということは，単純に，M の任意の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が N の開集合である，という条件です．その条件の上に，さらに，各 local chart について f を局所表示したときに，その表示されたものがすべて C^∞ 級のとき，f を C^∞ **級写像**とよぶ，という定義の流れです．

問． 位相が「**ものごとのつながり具合を表す概念**」とありますが，写像の連続性についてのみしか解説がありません．つながり具合と聞くと，まず最初に "連結" が思い浮かびました．このあとで，写像空間の連結性，連結成分数等の話が展開されるのですか？「位相幾何学」や「トポロジー」という本を眺めても"連結"の定義のよくできている具合を解説しているものは見つかりませんでした．"連続" については，あんなにも解説があるのに，"連結" はないがしろにされているようでかわいそうです．

答． 大丈夫です．たとえば，松本幸夫さんの「トポロジー」岩波書店，という本には連結，弧状連結，単連結，などの概念が明解に説明されています．ちなみに,「連結」と「連続」には関係があります．位相空間 X が連結でない，ということと，全射連続写像 $X \to \{0,1\}$ がある，は同じことです．(ただし，$\{0,1\}$ には離散位相を入れる)．位相空間 X が弧状連結である，ということは，X の任意の２点 $p, q \in X$ に対して，連続写像 $c: [0,1] \to X$ で $c(0) = p, c(1) = q$ となるものがある，ということです．(ただし，ゼロイチ区間 $[0,1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ には $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れる)．

問． 写像空間に位相を入れるのは，自然なような，でも写像とは何を考えているのかわからなくなったりします．

答． 「写像がわかれば数学がわかる」というぐらいなので，写像は難しいと言えますね．まず，数を数える，ということは写像 (１対１対応) を作るということですね．それから，線形代数の基本的対象である線形写像は写像ですね．微分積分の基本的対象である関数や，多様体論のベクトル場や微分形式も写像ですね．微分作用素も写像です．そして，写像１つ１つを調べるのではなくて，写像をまとめて考えて，そこに位相などの構造を入れて，写像の間の関係・構造を調べ上げるということは，確かに，数学の基本的な方法になっています．

問． 「数学はすべて集合と写像の言葉で表される」に同値関係も入れたい気がします．

答． なるほど．でも，同値関係は，直積集合のある部分集合で，いくつかの条件を満たすもの，と捉えられるので，集合の方に入っているので落選しました．

問． set の定義を与えてください．

答． 難しいですね．公理的集合論 (ツェルメロ・フランケルなど) で，集合とは何かが定義されています．それはさておき，Working Mathematician の本音として，次のような定義 (?) ではどうでしょうか？「(0) 実数全体 $\mathbf{R}$ は集合である．(1) 集合から集合への写像の全体は集合である．(2) 集合の一部分は集合である (部分集合)．(3) 集合の同値関係による同値類の全体は集合である (商集合)．(4) 集合と集合の disjoint union は集合である．以上の構成を有限回くり返して適用して得られるものが集合である.」普段あつかう対象についてはこれで十分です．たとえば，集合 X と X の直積は，$\{0,1\}$ から X への写像の全体なので，(0), (2), (1) を使えば集合であることがわかります．したがって，$\mathbf{R}^n$ は集合であり，$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ も集合になります．また，集合 X の部分集合の全体 (べき集合) も，X から $\{0,1\}$ への写像の全体なので集合です．

問． 予習するために参考にする本があれば教えてください．

答． 残念ながらありません．この講義は予習しなくてもよいです．復習しておけば大丈夫です．とはいえ，参考文献を挙げておくと，たとえば，泉屋・石川「応用特異点論」共立出版，福田拓生「初等カタストロフィー」共立出版，松本幸夫「トポロジー」岩波書店，松本幸夫「多様体の基礎」東大出版，などは眺めると参考になるかも知れません．

問． 北大の研究者で一番尊敬している方は誰ですか？(自分自身でもいいです)．

答． 全員です．皆さん尊敬すべき面を持っていて，その尊敬すべき面に優劣はとてもつけられないということですね．

コメント． カントは何もできない (can't)． // 先日，エリンギ茸を買いに行ったら，エンズイ斬りくれました．

コメントのコメント． むむ．よくわかりませんが，ありがとう.「しいたけられて，いかんともしがたい」ということかな．では，引き続きよろしくお願いします．