写像空間のトポロジーと幾何と特異点論

Topology and Differentiable Structure of a Mapping Space Quotient

石川 剛郎 (北大・理)

２００４年１０月〜２００５年１月

0 「美しいものは皆，写像空間の特異点である」

この講義では，写像空間あるいはその商空間 (写像商空間) にトポロジー (位相構造) をどう入れるか，微分構造をどう入れるか，ということを説明する．

0.1 講義の目的は何か？

N を n 次元[1] C^∞ 多様体，M を m 次元 C^∞ 多様体とする．

$$C^\infty(N, M) := \{f : N \to M \ C^\infty\text{写像}\}$$

おく[2]．

X を $C^\infty(N, M)$ の部分集合 (写像空間, mapping space)， $\sim$ を X 上の同値関係とし，$X/\sim$ を商集合 (写像商空間, mapping space quotient) としたとき，$X/\sim$ にどのように位相構造，微分構造を入れるか，ということ．

0.2 いくつかの漠然とした例．動機付けとして．

例 0.1 (結び目空間[3], space of knots) $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3) \subset C^\infty(S^1, \mathbf{R}^3)$ を円周 S^1 から $\mathbf{R}^3$ へのうめ込み (embedding) の全体の集合とする．$\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3)$ の連結成分を調べるのが結び目理論である．さらに，$\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3)$ 上にいろいろな幾何構造 (たとえばシンプレクティック構造や複素構造) が定まる (Brylinski)．

[1] この世の中は無限次元だ．３次元だとか４次元だとか言っているが，そんなはずはない．この複雑な世界を表すには無限のパラメータが必要だ．とはいえ，人間が理解できるのは，所詮有限次元だ．無限次元の中から，目的に応じて，有限個のパラメータに注目する．有限次元の情報に着目するのだ．しかも，それらのパラメータには制約が付く．というわけで，有限次元の多様体の研究をする．この段階で幾何が威力を発揮する．さて，有限次元の多様体の研究では，多様体の上の関数や多様体から多様体への写像を調べる．写像空間は無限次元だ．そこでまた，有限個のパラメータに注目する．このくり返しの中で研究が進んでいくわけである．

[2] この講義では，C^∞ のカテゴリーを扱うが，他の場合に同様に議論できる部分もある．

[3] S^1 から $\mathbf{R}^3$ へのうめ込み，あるいはその像を結び目 (knot) という．

例 0.2 $\mathrm{Diff}(N) := \{\varphi : N \to N\ C^\infty$微分同相写像$\}$ は，位相群，無限次元リー群の構造が入る．たとえば，$\mathrm{Diff}^+(S^2) \simeq SO(3)$ (3 次特殊直交群とホモトピー同値) などという定理[4]では，写像空間 $\mathrm{Diff}(N)$ の位相を定めておかなければいけない．

例 0.3 (リーマン構造のスーパー空間) N を C^∞ 多様体とする．$\mathcal{R}_N := \{N$ 上の Riemann 計量$\}$ とおくと，これは写像空間と考えられる．この空間に群 $\mathrm{Diff}(N)$ が自然に作用する．その軌道空間 (商空間) $\mathcal{S}_N := \mathcal{R}_N/\mathrm{Diff}(N)$ は，N 上のリーマン構造の同型類の全体の空間である．

例 0.4 (変分法) N, M を多様体とし，$\Phi : C^\infty(N, M) \to \mathbf{R}$ を写像空間上の関数とする：$\Phi = \Phi(f)$ で，変数 f が写像. $f \in C^\infty(N, M)$ が Φ **の臨界点** (critical point) とは，f の任意の 1-parameter 変形 f_t について $\dfrac{d}{dt}\Phi(f_t)|_{t=0} = 0$ となること．このアイディアをもとに，後で $C^\infty(N, M)$ に微分構造を入れる．

例 0.5 (写像の安定性，特異点の分類問題) $C^\infty(N, M)$ に群 $\mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(M)$ が自然に作用する．$f \in C^\infty(N, M)$ が C^∞-**安定** (C^∞-stable) とは f の軌道が開集合であること．(つまり，f のある近傍内の任意の f' が $\mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(M)$-作用で f と移りあうこと．商空間 $\mathcal{M} := C^\infty(N, M)/\mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(M)$ の構造を調べることが，写像の微分トポロジーの目的である．点 $x_0 \in N$ について，点 x_0 での芽 (germ) を考えることにより，$C^\infty(N, M)$ に同値関係 $\sim_{x_0}$ が入る．商空間 $C^\infty(N, M)/\sim_{x_0}$ は，C^∞ 写像芽 (しゃぞうが) $f : (N, x_0) \to M$ の全体の空間である．この空間にトポロジーや微分構造を入れる．さらに，種々の同値関係による商空間の構造を調べるのが，写像の特異点論の目的となる．

1 「数学はすべて集合と写像の言葉で論理的に表される」

1.1 写像

X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係，商空間 $X/\sim$ は，X の $\sim$ に関する同値類の全体の集合．

X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とする．つまり，X の各要素 x に対して，Y の要素 $f(x)$ を対応させる規則．このとき，$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ を f のグラフ (graph) という．$\pi_X : X \times Y \to X$ を $\pi_X(x, y) = x$ で定義するとき，$\pi_X|_{\Gamma(f)} : \Gamma(f) \to X$ は全単射.

例 1.1 たとえば，$m \times n$ 型行列とは写像 $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbf{R}$ のこと，数列とは写像 $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ のこと.

例 1.2 $X = \mathbf{R}^n, Y = \mathbf{R}^m$ をデカルト空間 (Cartesian space) とする．写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は，n 変数関数の組 $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m), (f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ のことである．

f が C^r **級写像**とは，各 $i, (i = 1, 2, \ldots, m)$ について，f_i が C^r 級関数 (r 階までの偏導関数がすべて存在し連続) ということ[5].

C^0 級とは連続ということ．$C^1, C^2, \ldots, C^\infty$ および C^ω (実解析的)．以後，とくに C^∞ 級のものを主に扱う．

[4]ちなみに Diff^+ は向きを保つ微分同相写像の全体を表す.
[5]f の定義域が $\mathbf{R}^n$ の領域 (開集合) の場合も定義は同様

1.2 位相 (topology)

状況設定：X を集合，$\mathcal{O}$ を X 部分集合族とする．

条件[6]

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(2) $U, V \in \mathcal{O}$ ならば $U \cap V \in \mathcal{O}$

(3) $U_\lambda \in \mathcal{O}(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

をすべて満たすとき，$\mathcal{O}$ を X の開集合系あるいは X の位相 (位相構造) などという．位相が指定された集合 $X = (X, \mathcal{O})$ を位相空間[7]という．集合に与えうる位相はいろいろある．

$X = (X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき，$U \in \mathcal{O}$ を X の開集合という．このとき，$A \subseteq X$ が閉集合であるとは，その補集合 $X \setminus A$ が X の開集合であること．

≪部分集合族で生成される位相≫

状況設定：X を集合，$\mathcal{W} = \{W_\mu\}$ を X のある部分集合族とする．

$\mathcal{W}$ が生成する位相とは，$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{O}$ となる「開集合系の条件」をみたすような最小の $\mathcal{O}$ のこと．

≪相対位相≫

状況設定：$X = (X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$Y \subseteq X$ を部分集合とする．

このとき，Y に位相を次のように入れる：$U \subseteq Y$ が開集合ということを，X のある開集合 $V \subseteq X$ があって，$U = Y \cap V$ と表されること．つまり，

$$\mathcal{O}_Y := \{Y \cap V \mid V \in \mathcal{O}_X\}$$

とする．この $\mathcal{O}_Y$ は Y 上の開集合系の条件をみたす．

≪商位相≫

状況設定：$X = (X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係とする．

このとき，商集合 $X/\sim$ に位相を次のように入れる．

自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$，$\pi(x) = [x]$ に関して，$U \subseteq X/\sim$ が開集合というのを逆像 $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ が X の開集合であること，と定める：

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid \ \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

は $X/\sim$ 上の開集合系の条件をみたす．

≪連続写像，同相写像≫

X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が**連続写像** (continuous) とは，Y の任意の開集合 U に対して，その逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合であること．

写像 $\varphi : X \to Y$ が**同相写像** (homeomorphism) とは，全単射で，連続で，逆写像 φ^{-1} も連続なこと．同相写像が１つでもあれば X と Y は**同相**である (homeomorphic) という．

例 1.3 (1) $\mathbf{R}$ 上の同値関係を $x \sim x' \Leftrightarrow x' = x$ または $x' = -x$ で定義する．$\mathbf{R}$ の位相から $\mathbf{R}/\sim$ に商位相を入れる．一方，半直線 $\mathbf{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ に $\mathbf{R}$ の位相からの相対位相を入れる．このとき，$\mathbf{R}/\sim$ と $\mathbf{R}_{\geq 0}$ は同相である．

[6]開集合系の条件

[7]位相という構造が入った途端に，集合は空間とよばれる．文明社会になったということか．

(2) $\mathbf{R}$ 上の別の同値関係を $x \approx x' \Leftrightarrow (x = x' = 0$ または $xx' \neq 0)$ で定める．$\mathbf{R}/\approx$ は 2 つの同値類からなる集合である．$\mathbf{R}/\approx = \{[0],[1]\}$ の商位相は $\{\emptyset, \{[1]\}, \{[0],[1]\}\}$ である．この位相空間はダイヤグラム

$$\bullet \longleftarrow \bullet$$

で表される．

≪距離空間と位相≫

位相が「ものごとのつながり具合」を表す概念とすると，**距離**は「ものごとの遠近」を表す概念である[8].

状況設定：X を集合，$d : X \times X \to \mathbf{R}$ を直積集合 $X \times X$ 上の関数とする．

$d : X \times X \to \mathbf{R}, (d = d(x,x'))$ が X 上の**距離** あるいは **距離関数** であるとは，条件 (距離の条件)

(1) $d(x,x') \geq 0, (x, x' \in X)$,

(2) $d(x,x') = 0 \Leftrightarrow x = x', (x, x' \in X)$,

(3) $d(x,x') = d(x',x), (x, x' \in X)$,

(4) $d(x,x') + d(x',x'') \geq d(x,x''), (x, x', x'' \in X)$.

をみたすこと．このとき，(X,d) を距離空間 (metric space) とよぶ．$x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して，

$$U_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x,x') < \varepsilon\}$$

を，点 x の ε-近傍とよぶ.

(X,d) が距離空間のとき，X に位相を次のように入れることができる[9].

$$U \subseteq X \text{ が開集合} \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subseteq U$$

つまり，

$$\mathcal{O}_X := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subseteq U\}$$

とおくと，X の部分集合族 $\mathcal{O}_X$ は開集合系の条件をみたす.

演習問題 1.4 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．このとき，写像 $f : X \to Y$ が連続であるということが,「$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ such that $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$」ということで定義される．一方，上の構成により，位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が定まるので，$f : X \to Y$ が連続というのを「Y 開集合の逆像が X の開集合」ということで定義することができた．さて，この 2 つの定義が合致することを確かめて安心せよ．

2 「だって自然数も実数も抽象的なものじゃないか」— 写像空間のトポロジー

2.1 C^0 位相

$$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \ \ C^0\text{写像}\}$$

[8]距離が「遠近」なら，位相は「連断」か．また，距離を決めれば ε-近傍が定まり，位相を決めれば，近傍系がきまる，と理解すればよい．ただし，ある点の近傍とは，その点が属する，ある開集合を含むもののこと

[9]遠近感がわかれば，つながり具合は自ずからわかる，というものだ.

(連続写像の全体の集合) とおく．$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相 (C^0 topology) あるいは同じことだがコンパクト開位相 (compact open topology) の定義：生成する部分集合族を与えることで位相をきめる．

$K \subset \mathbf{R}^n$ をコンパクト集合，$U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 開集合について，

$$W(K, U) := \{f \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^0 f(K) \subseteq U\}$$

とおく．ただし，

$$j^0 f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m,\ j^0 f(x) = (x, f(x)),$$

は"グラフ写像"である．(参考：写像のグラフ)．$W(K, U)$ は，指定されたコンパクト集合 K 上でグラフが指定された開集合 U に入るような連続写像の全体．$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の部分集合族

$$\{W(K, U) \mid K \subset \mathbf{R}^n \text{ compact},\ U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \text{ open}\}$$

で生成される $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を C^0 **位相**とよぶ．この位相構造 (開集合系) を $\mathcal{O}_{C^0}$ と書こう．

C^0 位相 $\mathcal{O}_{C^0}$ について，部分集合 $\Omega \subseteq C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ が開集合 $\Leftrightarrow \forall f \in \Omega, \exists K_1, \dots, K_s$, ($\mathbf{R}^n$ の compact 集合)，$\exists U_1, \dots, U_s$, ($\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の開集合),

$$f \in W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2) \cap \cdots \cap W(K_s, U_s) \subseteq \Omega.$$

注意 2.1 $f \in W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2)$ ならば，$K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ があって，$f \in W(K, U) \subseteq W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2)$. 実際，たとえば $K = K_1 \cup K_2, U = (\pi_1^{-1}(K_1 \cap K_2) \cap U_1 \cap U_2) \cup (U_1 \setminus \pi^{-1}(K_1 \cap K_2)) \cup (U_2 \setminus \pi^{-1}(K_1 \cap K_2))$ とおけばよい．

例 2.2 (Weierstrass の近似定理) $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ に C^0 位相を入れる．このとき，多項式関数の全体 $\mathcal{P} \subset C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ は稠密 (dense)[10] である．

演習問題 2.3 (コンパクト開位相 = C^0 位相) $L \subset \mathbf{R}^n$ compact, $V \subseteq \mathbf{R}^m$ open に対して，

$$W'(L, V) := \{f \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid f(L) \subseteq V\}$$

とおく．$\{W'(L, V) \mid L \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, V \subseteq \mathbf{R}^m \text{ open}\}$ で生成される $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相 $\mathcal{O}_{CO}$ を**コンパクト開位相** (compact open topology) とよぶ[11]．このとき，$\mathcal{O}_{CO} = \mathcal{O}_{C^0}$ を示せ．

演習問題 2.4 $X = C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ は C^0 位相に関してハウスドルフ空間[12]であることを示せ．

演習問題 2.5 (1) $f \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ について，$T_f : C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $T_f(g) = f + g$ は C^0 位相について連続であることを示せ．

(2) $\alpha : C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $\alpha(f, g) = f + g$ は C^0 位相に関して連続であることを示せ[13]．

---

[10] つまり，任意の $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ の任意の開近傍が $\mathcal{P}$ と交わる

[11] 広義一様収束の位相とも言う．

[12] つまり，$f, g \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $f \neq g$, に対し，f の開近傍 W と g の開近傍 W' があって，$W \cap W' = \emptyset$.

[13] $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ には直積位相を入れる．つまり，$W(K, U) \times W(K', U')$ という形の集合で生成される位相である．

演習問題 2.6 $\mu : C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \to C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $\mu(f, g) = f \cdot g$ は C^0 位相に関して連続であることを示せ.

演習問題 2.7 $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell)$ と $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^\ell)$ は同相であることを示せ.

なお，$C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \subset C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $r > 0$, について，$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相からの相対位相を $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相と呼ぶ.

2.2 C^1 位相

次に，$C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^1 位相 を定義しよう.

$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ C^1 写像, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対し，偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$, を考え，"1-ジェット拡大 (1-jet extension)"

$$j^1 f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} = \mathbf{R}^{n+m+nm}$$

$j^1 f(x) = (x, f(x), \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))$ (連続写像である) を考える．ここで，$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は，f の 1 階偏導関数 (nm 個) をすべて並べたものを意味する.

$K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq \mathbf{R}^{n+m+nm}$ open に対し，

$$W(K, U) := \{f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^1 f(K) \subseteq U\}$$

とおく．部分集合族

$$\{W(K, U) \mid K \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, U \subseteq \mathbf{R}^{n+nm} \text{ open}\}$$

で生成される $C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を C^1 **位相**という[14].

2.3 C^2 位相

次に，$C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^2 位相を次のように定義する.

$f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ に対し，

$$j^2 f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m}$$

$j^2 f(x) = (x, f(x), \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x))$ を考え，$K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m}$ open に対し，

$$W(K, U) := \{f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^2 f(K) \subseteq U\}$$

とおくとき，部分集合族

$$\{W(K, U) \mid K \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m} \text{ open}\}$$

で生成される $C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を C^2 **位相**という.

[14] $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 上の C^1 位相は C^0 位相より強い．C^0 位相が，広義一様収束の位相なら，C^1 位相は，1 階導関数までこめた広義一様収束の位相である.

2.4 ジェット空間

ジェット空間 (jet space) $J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ の定義.

$$J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)=\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{nm}\times\mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m}\times\cdots\times\mathbf{R}^N=\mathbf{R}^M.$$

(これは，”テイラー多項式の全体の空間”を動機付けとしている)．ただし，$N=\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}m$, $M=n+m+nm+\dfrac{n(n+1)}{2}m+\cdots+\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}m=n+\begin{pmatrix} n+r \\ r \end{pmatrix}m$. そして，$j^rf:\mathbf{R}^n\to J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ を

$$j^rf(x):=(x,f(x),\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\partial_\ell}(x),\dots,\frac{\partial^r f_i}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_r}}(x))$$

で定める.

注意 2.8 $r\geq s$ について，

$$J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)=\{j^rf(x_0)\mid x_0\in\mathbf{R}^n, f\in C^s(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)\}$$

と表される[15].

$C^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 上の C^r 位相 $(r=0,1,2,3,4,\dots)$,

$$W(K,U):=\{f\in C^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)\mid j^rf(K)\subseteq U\}$$

を使って，$\{W(K,U)\}$ で生成される位相として定義される.

$C^s(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 上の C^r 位相 $(s=r,r+1,\dots,\infty,\omega)$ は，$C^s(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)\subseteq C^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ なので $C^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ の C^r 位相からの相対位相.

2.5 C^∞ 位相

$C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 上の C^∞ 位相.

$r\geq 0, K\subset\mathbf{R}^n$ compact, $U\subseteq J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ open に対し，

$$W(r,K,U):=\{f\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)\mid j^rf(K)\subseteq U\}$$

とおく．このとき $\{W(r,K,U)\}$ で生成される位相が C^∞ 位相.

注意 2.9 $X=C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ について，位相の列ができる：

$$\mathcal{O}_X^0\ \subseteq\ \mathcal{O}_X^1\ \subseteq\ \mathcal{O}_X^2\ \cdots\ \subseteq\ \cup_{r=0}^\infty\mathcal{O}_X^r=\mathcal{O}_X^\infty.$$

それぞれ $X=C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相，C^1 位相，C^2 位相,…，C^∞ 位相[16].

[15] 実際，多項式写像全体の上だけで f を動かせば十分だ

[16] どんどん大きくなる．どんどん強くなる．どんどん細かくなる．どんどん文明化されていく.

命題 2.10 $0 \geq r \geq s$ とする．($s = \infty$ でもよい)．写像の合成

$$\Phi : C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^s(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \to C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell),\ \Phi(f, g) = g \circ f,$$

は C^r 位相に関して連続写像である．

証明: $\Phi(f_0, g_0) = g_0 \circ f_0 = h_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$ とおく．$K \subset \mathbf{R}^n, U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell)$ について，$h_0 \in W(r, K, U)$ つまり $j^r h_0(K) \subseteq U$ とする．

$J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times_{\mathbf{R}^m} J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) := \{(j^r f(x_0), j^r g(y_0)) \in J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \mid f(x_0) = y_0\}$

とおき，$\varphi : J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times_{\mathbf{R}^m} J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \to J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell)$ を $\varphi(j^r f(x_0), j^r g(y_0)) = j^r(g^circf)(x_0)$ で定義する．φ は，(具体的に多項式で表される) 連続写像である．一般に $A \subset J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m), B \subset J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell)$ に対して，

$$A \times_{\mathbf{R}^m} B := \{j^r f(x_0), j^r g(y_0) \in A \times B \mid f(x_0) = y_0\} \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times_{\mathbf{R}^m} J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell)$$

とおく．仮定から，$\varphi((j^r f_0)(K) \times_{\mathbf{R}^m} (j^r g_0)(f_0(K))) \subseteq U$ が成立する．次の一般論 (命題 2.11) から「$(j^r f_0)(K)$ の開近傍 $V \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ と，$(j^r g_0)(f_0(K)))$ の開近傍 $V' \subseteq J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell)$ があって，$V \times_{\mathbf{R}^m} V' \subseteq \varphi^{-1} U$ 」が成り立ち，$\Phi(W(K, V), W(f_0(K), V'))$
$subseteq W(K, U)$ となり，Φ が連続であることがわかる． □

命題 2.11 [17] A, B, P をハウスドルフ空間，P が局所コンパクトでパラコンパクトとする[18]．$\pi : A \to P, \pi' : B \to P$ を連続写像とし，$K \subseteq A, L \subseteq B$ を部分集合で，$\pi|_K : K \to P$, $\pi'|_L : L \to P$ がプロパー[19]とする．U' を $K \times_P L = \{(a, b) \in K \times L \mid \pi(a) = \pi(b)\}$ の $A \times_P B = \{(a, b) \in A \times B \mid \pi(a) = \pi'(b)\}$ の中での開近傍とする．このとき，$V \times_P V' \subseteq U'$ となるような A における K の開近傍 V と B における L の開近傍 V' が存在する．

注意 2.12 C^r 位相 ($r = 0, 1, 2, \dots, \infty$) は，可算個の部分集合族で生成される．実際，有理点中心の有理半径の球を使って，

$$\{W(r, \overline{U_{1/k}(a)}, U_{1/\ell}(b)) \mid a \in \mathbf{Q}^n, b \in \mathbf{Q}^M, k = 1, 2, \dots, \ell = 1, 2, \dots\}$$

という可算個の生成系が作られる．ただし，$\mathbf{Q}^M \subset \mathbf{R}^M = J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

2.6　ホイットニー C^∞ 位相

$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の Whitney C^0 位相：$U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ open に対して，

$$W(U) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^0 f(\mathbf{R}^n) \subseteq U\}$$

とおく．$\mathbf{R}^n$ 全体の上でグラフが 指定された開集合 U に含まれるような f の全体．$\{W(U)\}$ で生成される位相を $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の **Whitney C^0 位相**という．

[17]証明は，J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings II: Infinitesimally stability implies stability,* Ann. of Math., **89** (1969), 254–291. の pp.261–262. または，M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities,* Graduate Texts in Math., **14**, Springer-Veerlag, 1973. を見よ．

[18]たとえば，A, B, P が多様体．

[19]コンパクト集合の逆像がコンパクトであるような写像のこと．

$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の Whitney C^∞ 位相：$r \geq 0, U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ open に対して,

$$W(r, U) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^r f(\mathbf{R}^n) \subseteq U\}$$

とおく．ここで，$j^r f : \mathbf{R}^n \to J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ は f の r-ジェット拡大．そして，$\{W(r, U) \mid r \geq 0, U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\}$ で生成される $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を **Whitney C^∞ 位相**という.

$C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の Whitney C^r 位相 $(s \geq r)$ なども同様に定義.

$$C^s_{pr}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) := \{f \in C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid f \text{ はプロパー写像 }\}$$

とおく.

命題 2.13 $0 \geq r \geq s$ とする．$(s = \infty$ でもよい$)$．写像の合成

$$\Phi : C^s_{pr}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^s(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \to C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell),\ \Phi(f, g) = g \circ f,$$

は *Whitney* C^r 位相に関して連続写像である.

証明は，命題 2.10 の証明と同様にできる.

3 「四色の紙で作った多様体」

3.1 多様体上の C^∞ 写像空間

N を n 次元 C^∞ 多様体，M を m 次元 C^∞ 多様体[20]

$f : N \to M$ が C^∞ **写像**とは，f が <u>連続写像</u> で，任意の local chart $(U, \varphi), (V, \psi)$ (局所座標系) に関して

$$\boldsymbol{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap f^{-1}\psi(V)) \to V$$

(局所表示) が C^∞ 写像であること.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \mathbf{R}^n \supseteq U & & V \subseteq \mathbf{R}^m \end{array}$$

さて,

$$C^\infty(N, M) := \{f : N \to M \ \mid\ C^\infty\text{写像 }\}$$

とおく.

例 3.1 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は 1 次元 C^∞ 多様体，$\mathbf{R}^2$ は 2 次元 C^∞ 多様体. $C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ は平面 C^∞ 閉曲線の全体の集合.

例 3.2 $N = \{\mathrm{pt}\}$ (1 点からなる空間) 0 次元多様体. $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$ は，$(f : \mathrm{pt} \to M) \mapsto f(\mathrm{pt}) \in M$ によって M と同一視される.

$\varphi : N \to N'$ が C^∞ **微分同相写像** (diffeomorphism) とは，φ が C^∞ 写像であって，全単射であって，逆写像 φ^{-1} も C^∞ 写像であること.

[20]**多様体**とは，球面のように，どの点の近傍でも座標がとれる空間．座標変換が C^∞ 級であることを要請．**次元**とは必要な座標の個数．ちなみに,「吝嗇 (りんしょく) な神が作った多様体」という某先生の有名な言葉がある.

3.2 多様体上のジェット空間

$J^r(N,M)$ の導入：
$x_0 \in N$ について $f : N \to M$ と $g : N \to M$ が x_0 で同じ r-**ジェット** (jet) を定める (記号 $f \sim_{r,x_0} g$) とは，共通の局所座標系に関して，局所表示

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\boldsymbol{f}_m(x_1,\ldots,x_n)),\quad \boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\boldsymbol{g}_m(x_1,\ldots,x_n)),$$

の x_0 での r 階までの偏微分係数がすべて等しい，i.e.

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\boldsymbol{f}_i}{\partial x^\alpha}(x_0) = \frac{\partial^{|\alpha|}\boldsymbol{g}_i}{\partial x^\alpha}(x_0),\quad 0 \le |\alpha| \le r, 1 \le i \le m.$$

ということ．
f の x_0 での同値類を $j^r f(x_0)$ と書く[21]．

$$J^r(N,M) := \{j^r f(x_0) \mid x_0 \in N, f \in C^\infty(N,M)\}$$

とおく ($N \times M$ 上の r-**ジェット空間**)．これは $J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ と同じように C^∞ 多様体である．しかも $\dim J^r(N,M) = \dim J^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$.
$f \in C^r(N,M)$ に対して r-ジェット拡大 (jet extension)

$$j^r f : N \to J^r(N,M)$$

を $j^r f(x) = j^r f(x)$ で定義する． $j^r f$ は C^∞ 写像である．

3.3 C^∞ 位相と Whitney C^∞ 位相

$C^\infty(N,M)$ 上の C^∞-位相：$r \ge 0$ integer, $K \subseteq N$ compact, $U \subseteq J^r(N,M)$ open に対して

$$W(r,K,U) := \{f \in C^\infty(N,M) \mid j^r f(K) \subseteq U\}$$

とおく．部分集合族

$$\{W(r,K,U) \mid\ r \ge 0 \text{ integer}, K \subseteq N \text{ compact}, U \subseteq J^r(N,M) \text{ open}\}$$

で生成される位相を $C^\infty(N,M)$ の C^∞-**位相**という．
$C^\infty(N,M)$ 上の Whitney C^∞-位相：$r \ge 0$ integer, $U \subseteq J^r(N,M)$ open に対して

$$W(r,U) := \{f \in C^\infty(N,M) \mid j^r f(N) \subseteq U\}$$

とおく．部分集合族 $\{W(r,U)\}$ で生成される位相を $C^\infty(N,M)$ の Whitney C^∞-**位相**という．
$f \in C^\infty(N,M)$, $f \in W(r,U)$ ならば，明らかに，任意の $K \subseteq N$ compact について $f \in W(r,U) \subseteq W(r,K,U)$ が成り立つので，C^∞ 位相より Whitney C^∞ 位相の方が強い．
N がコンパクトなら，C^∞ 位相と Whitney C^∞ 位相は一致するが，N がコンパクトでなければ，C^∞ 位相より Whitney C^∞ 位相の方が本当に強い．

[21] ところで，ジェットはなぜジェットと呼ばれるのだろうか．

演習問題 3.3 $C^\infty(N,M)$ 上の C^∞ 位相を $\mathcal{O}_{C^\infty}$, Whitney C^∞ 位相を $\mathcal{O}_{WC^\infty}$ と書くとき，次の問いに答えよ．

(1) N が compact ならば，$\mathcal{O}_{C^\infty} = \mathcal{O}_{WC^\infty}$ であることを示せ．

(2) ($N = \mathbf{R}, M = \mathbf{R}$ の場合) $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ について，$\mathcal{O}_{C^\infty} \subset \mathcal{O}_{WC^\infty}$, $\mathcal{O}_{C^\infty} \neq \mathcal{O}_{WC^\infty}$ を示せ．

注意 3.4 $0 \le r \le s \le \infty$ に対して $C^s(N,M) := \{f : N \to M \mid C^s\text{写像}\}$ 上の C^r-位相や Whitney C^r-位相が同様に定義される．

命題 3.5 N, M, L を C^∞ 多様体とする．$0 \le r \le s$ とする．($s = \infty$ でもよい)．写像の合成

$$\Phi : C^s(N,M) \times C^s(M,L) \to C^s(N,L),\ \Phi(f,g) = g \circ f,$$

は C^r 位相に関して連続写像である．

また，

$$C^s_{pr}(N,M) := \{f \in C^s(N,M) \mid f\text{ はプロパー写像}\}$$

とおく[22]．

命題 3.6 N, M, L を C^∞ 多様体とする．$0 \le r \le s$ とする．($s = \infty$ でもよい)．写像の合成

$$\Phi : C^s_{pr}(N,M) \times C^s(M,L) \to C^s(N,L),\ \Phi(f,g) = g \circ f,$$

は Whitney C^r 位相に関して連続写像である．

命題 3.5, 3.6 の証明は，命題 2.10 の証明と同様にできる．

3.4 写像芽空間

ここで，germ [23] の話．

$x_0 \in N$ とする．$f, g \in C^\infty(N, m)$ が x_0 **で同じ芽 (germ) を定める** (記号 $f \sim_{x_0} g$) とは，$f(x) = g(x) (x \in U)$ となる x_0 の開近傍 $U \subseteq N$ が存在すること．同値類を f_{x_0} と書き，写像 f の点 x_0 における**芽**という．

演習問題 3.7 同じ芽 (germ) を定めるという関係 $\sim_{x_0}$ は同値関係であることを示せ．

写像の局所的情報はすべて芽に含まれている．

注意 3.8 (1) 写像芽の記号：$f_{x_0}, (f \in C^\infty(N,M), x_0 \in N)$, のことを $f : (N, x_0) \to (M, y_0)$ と表すことも多い．ここで，$y_0 = f(x_0)$ である．たとえば，微分同相写像芽 $\sigma : (\mathbf{R}, x_0) \to (\mathbf{R}, x_0')$ といった場合，これは，微分同相写像 $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ($\in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$) の $x_0 \in \mathbf{R}$ における芽であり，$x_0' = \sigma(x_0)$ ということ．

(2) 写像芽の代表元の定義域：$x_0 \in \Omega, x_0 \in \Omega'$ (N における x_0 の開近傍たち) と $f \in C^\infty(\Omega, M)$ $g \in C^\infty(\Omega', M)$ に対しても，f と g が x_0 で同じ芽を定めるという関係は定義される．

(3) $x_0 \in N, x_0 \in \Omega \subseteq N$, 開近傍，$f \in C^\infty(\Omega, M)$ に対し，$F \in C^\infty(N,M)$ があって，f と F は x_0 で同じ芽を定める．

[22] コンパクト集合の逆像がコンパクトになるような写像のことを proper という．プロパー写像で写すと，”遠くのものは遠くに写る”．

[23] germ にはバイキンという意味もあるが，芽という意味もある．

演習問題 3.9 C^∞ 写像芽 $f:(N,x_0)\to(M,y_0), g:(M,y_0)\to(L,z_0)$ に対し，合成 $g\circ f:(N,x_0)\to(L,z_0)$ が C^∞ 写像芽として定まることを示せ．(合成が C^∞ であることと，$f\sim_{x_0} f', g\sim_{y_0} g'$ ならば $g\circ f\sim_{x_0} g'\circ f'$ であること)．

さて，$C^\infty(N,M)\times N$ に C^∞-**位相**を入れて位相空間とする．さらに同値関係

$$(f,x_0)\sim(g,x_0') \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x_0=x_0', f_{x_0}=g_{x_0}$$

を導入して商空間をとる．

商空間

$$\mathcal{G}(N,M):=(C^\infty(N,M)\times N)/\sim$$

を**写像芽空間** (space of map-germs) という．($C^\infty(N,M)\times N$ の C^∞ 位相からの商位相を入れる)．このとき，自然な連続写像たち

$$\mathcal{G}(N,M)\to J^r(N,M)\to N\times M$$

$f_{x_0}\mapsto j^rf(x_0)\mapsto(x_0,f(x_0))$ がある．

演習問題 3.10 写像 $\pi:\mathcal{G}(N,M)\to J^r(N,M)$, $\pi(f_{x_0})=j^rf(x_0)$, が (1) well-defined であること (2) 連続写像であることを示せ．

定義 3.11 2 つの写像芽 $f:(N,x_0)\to(M,y_0)$ と $f':(N',x_0')\to(M',y_0')$ が $\mathcal{A}$-**同値** (**左右同値**ともいう．記号 $f_{x_0}\sim_{\mathcal{A}} g_{x_0'}$) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 微分同相写像芽 $\sigma:(N,x_0)\to(N',x_0')$ と微分同相写像芽 $\tau:(M,y_0)\to(M',y_0')$ があって，$\tau\circ f=f'\circ\sigma:(N,x_0)\to(M',y_0')$.

また,

$$\Sigma_\infty:=\{f_{x_0}\in\mathcal{G}(\mathbf{R},\mathbf{R})\mid \frac{d^rf}{dx^r}(x_0)=0, r=1,2,3,\ldots.\}$$

(すべての微分係数が消えてしまう関数芽の全体) とおく．このとき，次の分類定理が成り立つ：

定理 3.12 商空間 $(\mathcal{G}(\mathbf{R},\mathbf{R})\setminus\Sigma_\infty)/\sim_{\mathcal{A}}$ は自然数全体の空間 $\mathbf{N}$ と同相である．

ただし，$\mathbf{N}$ には (離散位相ではなく)

$$\mathcal{O}_{\mathbf{N}}=\{\{0,1,\ldots,n\}\mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{\emptyset,\mathbf{N}\}$$

という (自然な順序から定まる) 位相を入れる[24]：$\bullet\longleftarrow\bullet\longleftarrow\bullet\longleftarrow\cdots\cdots$

一般に，$(\Lambda,\leq)$ を半順序集合[25] とする．部分集合 $V\subseteq\Lambda$ が**飽和的** (saturated) とは，$v\in V, v'\in\Lambda, v'\leq v\Rightarrow v'\in V$ が成り立つことである．さて，$\mathcal{O}_\Lambda$ を Λ の飽和的部分集合の全体のなす集合族とするとき $\mathcal{O}_\Lambda$ は開集合系の条件をみたす．これが順序構造から定まる位相である．

演習問題 3.13 $\mathcal{O}_\Lambda$ が開集合系の条件をみたすことを示せ．

---

[24] $\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots,\}$ である．零も自然数の仲間に入れる．

[25] Λ の 2 要素の組の一部に関係 $v\leq v'$ が定まっていて，$v\leq v$ と $(v\leq v', v'\leq v\Rightarrow v=v')$ と $(v\leq v', v'\leq v''\Rightarrow v\leq v'')$ が成り立つこと．

定理 3.12 **の証明**. $g:(\mathbf{R},x_0)\to(\mathbf{R},y_0)$, に対して,

$$\mathrm{ord}_{x_0}g := \min\{r\in\mathbf{N}\mid \frac{d^r g}{dx^r}(x_0)\neq 0\}$$

とおき, g の x_0 における位数 (order) という.

写像 $\varphi:\mathcal{G}(\mathbf{R},\mathbf{R})\setminus\Sigma_\infty\to\mathbf{N}$ を $f_{x_0}\mapsto \mathrm{ord}_{x_0}\dfrac{df}{dx}$ は全射であり連続写像である[26]. また, φ は開写像である[27]. φ は写像 $\bar{\varphi}:(\mathcal{G}(\mathbf{R},\mathbf{R})\setminus\Sigma_\infty)/\sim_{\mathcal{A}}\to\mathbf{N}$ を誘導する. $\bar{\varphi}$ は全単射[28]であり連続写像であり, 開写像である. $\bar{\varphi}^{-1}:\mathbf{N}\to(\mathcal{G}(\mathbf{R},\mathbf{R})\setminus\Sigma_\infty)/\sim_{\mathcal{A}}$ も連続であるので, $\bar{\varphi}$ は同相写像である. □

次に, $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})=(C^\infty(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})\times\mathbf{R}^2)/\sim$ を $\mathbf{R}^2$ 上の実数値関数芽空間とする.

命題 3.14 芽 $f:(\mathbf{R}^2,x_0)\to(\mathbf{R},y_0)$, $f_{x_0}\in\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ について, 次の条件は同値である：

(1) $f:(\mathbf{R}^2,x_0)\to(\mathbf{R},y_0)$ の $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ の中での f_{x_0} の開近傍 V があって, $V/\sim_{\mathcal{A}}$ が有限集合となる.

(2) 芽 f_{x_0} の $\sim_{\mathcal{A}}$ 同値類 $[f_{x_0}]\in\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})/\sim_{\mathcal{A}}$ について, $[f_{x_0}]$ の $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})/\sim_{\mathcal{A}}$ における有限個の点からなる開近傍が存在する.

上の条件が成り立つとき, $f:(\mathbf{R}^2,x_0)\to(\mathbf{R},y_0)$ が 0-modal (あるいは simple) であると言い, 同値類 $[f_{x_0}]$ が 0-modal (あるいは simple) であるという[29]. そして, $\Sigma_{NS}\subset\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ で simple でない芽の $\mathcal{A}$-同値類の全体の集合, したがって, $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})\setminus\Sigma_{NS}$ で simple な芽の $\mathcal{A}$-同値類の全体の集合を表す. このとき, 次が成り立つ[30]：

定理 3.15 商空間 $(\mathcal{G}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})\setminus\Sigma_{NS})/\sim_{\mathcal{A}}$ は “ADE-空間” (図 1) に同相である.

4 「自然は数学の言葉で書かれている」— 写像商空間の微分構造

写像空間とその商空間に微分構造を入れる１つの方法を紹介する[31].

---

[26] $\pi:C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})\times\mathbf{R}\to\mathcal{G}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ を自然な射影とし, $(f,x_0)\in(C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})\times\mathbf{R})\setminus\pi^{-1}(\Sigma_\infty)$ とし, $\mathrm{ord}_{x_0}\dfrac{df}{dx}=n$ とする. このとき, $\varepsilon>0$ を十分小さくとり, $K=[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$, $V=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, $U=\{j^{n+1}g(x)\in J^n(\mathbf{R},\mathbf{R})\mid |g^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x_0)|<\varepsilon\}$ とおけば, $(g,x)\in W(n,K,U)\times V\Rightarrow \mathrm{ord}_x\dfrac{dg}{dx}\leq n$ が成り立つ.

[27] 開集合の像が開集合であること. (f,x_0) の任意の開近傍 W と, $0\leq\ell\leq\varphi(f_{x_0})=\mathrm{ord}_{x_0}\dfrac{df}{dx}$ に対して, $g(x)=f(x)+\varepsilon(x)(x-x_0)^{\ell+1}$ とおく. ただし, ε は, C^∞ 関数で, $\varepsilon(x_0)\neq 0$, x_0 の近傍の外では $\equiv 0$ であるようなものを選ぶ. このとき, ε を選べば $g\in W$ ととれ, しかも, $\mathrm{ord}_{x_0}\dfrac{dg}{dx}=\ell$ である.

[28] $\mathrm{ord}_{x_0}\dfrac{df}{dx}=n$ ならば, f_{x_0} は x^{n+1} の 0 における芽と $\mathcal{A}$-同値.

[29] 一般に, 位相空間 $(\mathcal{G},\mathcal{O})$ においても, 点 $g\in\mathcal{G}$ が 0-modal (あるいは simple) とは, 有限個の点からなる g の開近傍 $U\in\mathcal{O}$ が存在すること, と定義できる.

[30] 証明については, V.I. Arnol'd, Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k,D_k,E_k, and Lagrange singularities, Funct. Anal. Appl., **6** (1972), 254–272. を見よ.

[31] 微分構造を入れる方法はいくつか知られている. たとえば, フレッシェ微分に基づいた方法がある (Eells の方法). また, 大森英樹さんが創った”ILB 多様体”(inverse limit Banach manifold) の概念などが有名. ただし, 私 (石川) の知る限り, ここに述べる方法のように汎用性がある方法は今までになかったと思う.

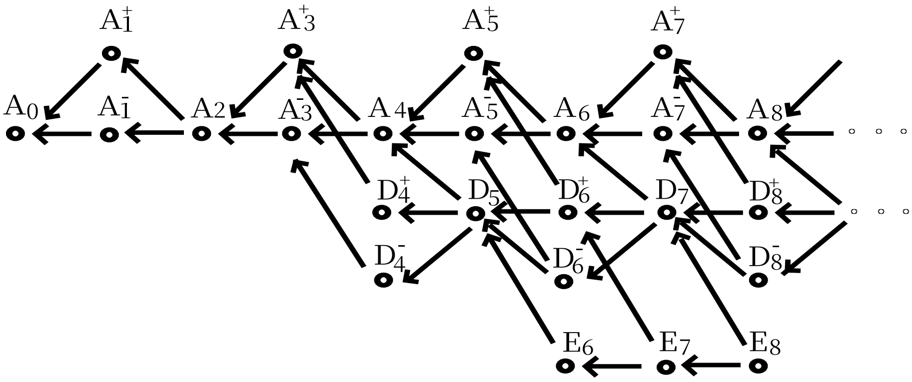

図 1: ADE-空間

4.1 構造とは?

$\{X_\nu\}$ を集合族とする[32].

$\{X_\nu\}$ 等に"微分構造"を入れるためには，各 $X_\nu, X_{\nu'}$ について，とにかく $X_\nu, X_{\nu'}$ が "微分同相" かどうかが判定できればよい．そのためには，与えられた写像 $\Phi : X_\nu \to X_{\nu'}$ が "C^∞ 級" であるかどうかが判定できればよい．

では，たとえば，写像 $\Phi : C^\infty(N, M) \to C^\infty(L, W)$ (L, W も多様体) が "C^∞ 級" とはどう定義すればよいだろうか？

各写像 $f \in C^\infty(N, M)$ に対し，写像 $\Phi(f) \in C^\infty(L, W)$ が定まっている．いま，Φ が C^∞ 級というのを，任意の "C^∞ 族 (family)" $h_\lambda \in C^\infty(N, M)$ に対し，$\Phi(h_\lambda) \in C^\infty(L, W)$ が "C^∞ 族" であることを条件としたい[33]．ここで，パラメータ λ は有限次元多様体 Λ 上を動き，$h_\lambda : N \to M$, $(\lambda \in \Lambda)$ が "C^∞ 族"とは，ある C^∞ 写像 $H : \Lambda \times N \to M$ があって $h_\lambda(x) = H(\lambda, x), (\lambda, x) \in \Lambda \times N$ ということである[34].

さて，そうすると，$\Phi(h_\lambda) \in C^\infty(L, W)$ に対して，C^∞ 写像 $G : \Lambda \times L \to W$ があって，$\Phi(h_\lambda)(x') = G(\lambda, x'), (\lambda, x') \in L \times W$ と表される．したがって，$\Phi(h_\lambda)$ の変数 λ による微分が考えられて便利である．

4.2 有限次元方向微分可能性

もう一例を考察しよう．関数 $\Psi : C^\infty(L, W) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級とは，どう定義したらよいだろうか？写像 $g \in C^\infty(L, W)$ に対して，実数値 $\Psi(g)$ が定まっている．有限次元 C^∞ 族 $g_\lambda \in C^\infty(L, W), \lambda \in \Lambda$ に対して，変数 λ の関数 $\Psi(g_\lambda)$ が定まっている．Ψ が C^∞ 級とは，関数 $\Psi(g_\lambda)$ が λ に関して C^∞ 級のときであると定める．各 $g_\lambda \in C^\infty(L, W)$ を空間 $C^\infty(L, W)$ の点であるとみなすと，写像族 $g_\lambda \in C^\infty(L, W)$ は，空間 $C^\infty(L, W)$ の中の "有限次元部分空間"とみなされ，そこに関数 Ψ を制限したものが，$\Psi(g_\lambda)$ である．その微分可能性に着目するの

[32]各 X_ν は，多様体のある部分空間のある商空間や，ある多様体 N, M の C^∞ 写像空間 $C^\infty(N, M)$ のある部分空間のある商空間を主に想定している．

[33]実際は，Φ が連続であるという条件も要請する．

[34]これは大域解析や微分トポロジーなどでよく使う概念である．このとき，写像 $h : \Lambda \to C^\infty(N, M), h(\lambda) = h_\lambda$, を C^∞ 級であるという．

である．つまり，ここで定めた微分可能性は，いわば「有限次元方向微分可能性」である[35]．

注意 4.1 上の定義が自然であるかどうか思考実験してみよう．

(1) $\Phi : C^\infty(N, M) \to C^\infty(L, W)$ が C^∞ 級で，$\Psi : C^\infty(L, W) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級のとき，合成 $\Psi \circ \Phi : C^\infty(N, M) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級になるかどうかを確かめてみましょう．

任意の C^∞ 族 $h_\lambda \in C^\infty(N, M)$ に対して，$(\Psi \circ \Phi)(h_\lambda)$ が λ について C^∞ 級であるかどうかであるが，$(\Psi \circ \Phi)(h_\lambda) = \Psi(\Phi(h_\lambda))$ であり，$\Phi : C^\infty(N, M) \to C^\infty(L, W)$ が C^∞ 級なので，$\Phi(h_\lambda)$ が C^∞ 級であり，Ψ が C^∞ 級なので，$\Psi(\Phi(h_\lambda))$ が C^∞ 級であるから，$(\Psi \circ \Phi)(h_\lambda)$ は C^∞ である．

(2) $\Psi : C^\infty(L, W) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級ということを定義したが，一方，$\mathbf{R}$ は $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \mathbf{R})$ と同一視されるので，$\Psi : C^\infty(L, W) \to C^\infty(\mathrm{pt}, \mathbf{R})$ であるとみなしたときに，C^∞ 級になるかどうか，ということを確かめてみよう．任意の C^∞ 族 $g_\lambda \in C^\infty(L, W)$ に対し，$\Psi(g_\lambda)$ が λ について C^∞ 級関数であるが，$H : \Lambda \times \{\mathrm{pt}\} \to \mathbf{R}$ を $H(\lambda, \mathrm{pt}) = \Psi(g_\lambda)$ で定めれば H は C^∞ であり，定義から $\Psi : C^\infty(L, W) \to C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \mathbf{R})$ は C^∞ 級である．

例 4.2 写像 $\Psi : C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}$ を $\Psi(f) := \displaystyle\int_{S^1} f^*(xdy)$，ただし，$x, y$ は $\mathbf{R}^2$ の座標，で定める．このとき，Ψ は C^∞ 級である．

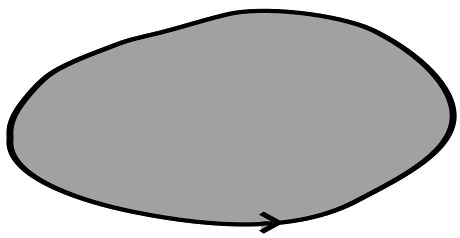

図 2: 曲線が囲む面積

演習問題 4.3 上の例を確かめよ．

4.3 写像商空間の微分構造

N, M, L, P をそれぞれ n, m 次元 C^∞ 多様体とする．また，Λ, Q も有限次元 C^∞ 多様体を表すこととする．

$X \subseteq C^\infty(N, M)$ を部分集合とする．このような集合 X を**写像空間**という．

(1) 写像 $h : \Lambda \to X$ が C^∞ 級 $\overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow}$ C^∞ 写像 $H : \Lambda \times N \to M$ があって $H(\lambda, x) = h(\lambda)(x) \in M$, $(\lambda \in \Lambda, x \in N)$.
(2) 写像 $k : X \to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow}$ k が連続写像で，任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to X$ に対して，合成 $k \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級.

[35] 人間にわかるの所詮有限次元.

さらに，$\sim$ を X 上の同値関係とするとき，$X/\sim$ で商空間を表す．このような商空間 $X/\sim$ を **写像商空間**という．射影 $\pi : X \to X/\sim$ を $\pi(x) = [x]$ (x の属する同値類) で定める．

(3) 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\ell \circ \pi : X \to Q$ が (2) の意味で C^∞ 級.
(4) 写像 $m : \Lambda \to X/\sim$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ に対して，$\ell \circ m : \Lambda \to Q$ がC^∞ 級.

補題 4.4 $h : \Lambda \to X$ が (1) の意味で C^∞ 級ならば $\pi \circ h : \Lambda \to X/\sim$ は (4) の意味で C^∞ 級.

証明: 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ について，$\ell \circ \pi : X \to Q$ は (2) の意味で C^∞ 級．したがって，$(\ell \circ \pi) \circ h = \ell \circ (\pi \circ h) : \Lambda \to Q$ は C^∞ 級．したがって (4) の意味で，$\pi \circ h$ は C^∞ 級である． □

(5) 一般に，写像商空間 $X/\sim$ から別の写像商空間 $Y/\approx \leftarrow Y \subseteq C^\infty(L, P)$ への写像 $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ φ が連続写像で，かつ，任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx \to Q$ に対して，$\ell \circ \varphi : X/\sim \to Q$ が (3) の意味で C^∞ 写像.
(6) 写像 $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が微分同相写像 (diffeomorphism) とは，φ が (5) の意味で C^∞ 級写像であり，全単射であり，逆写像 $\varphi^{-1} : Y/\approx \to X/\sim$ も (5) の意味でC^∞ 級写像であるときにいう.
(7) 写像商空間 $X/\sim$ と $Y/\approx$ が微分同相 (diffeomorphic) とは，微分同相写像 $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が存在するときにいう.

補題 4.5 次は同値である：

(i) $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が (5) の意味で C^∞ 級.

(ii) $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が連続写像であり，任意の (4) の意味の C^∞ 写像 $m : \Lambda \to X/\sim$ に対して，$\varphi \circ m : \Lambda \to Y/\approx$ が (4) の意味で C^∞ 級.

証明: (i) $\Rightarrow$ (ii) : 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx \to Q$ に対して (i) から $\ell \circ \varphi : X/\sim \to Q$ は (3) の意味で C^∞ 級．したがって $(\ell \circ \varphi) \circ m = \ell \circ (\varphi \circ m) : P \to Q$ は C^∞ 級．よって，$\varphi \circ m : \Lambda \to Y/\approx$ は (4) の意味で C^∞ 級.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx \to Q$ について，$\ell \circ \varphi : X/\sim \to Q$ が (3) の意味で C^∞ 級かどうか調べる．つまり $(\ell \circ \varphi) \circ \pi : X \to Q$ が (2) の意味で C^∞ 級かどうか調べる．そこで，任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to X$ について $((\ell \circ \varphi) \circ \pi) \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 写像かどうか調べる．ところで，補題 4.4 から，$\pi \circ h : \Lambda \to X/\sim$ は (4) の意味で C^∞ 級．よって (ii) から $(\varphi \circ \pi) \circ h = \varphi \circ (\pi \circ h) : \Lambda \to Y/\approx$ は (4) の意味で C^∞ 級．したがって，$\ell \circ (\varphi \circ \pi) \circ h = ((\ell \circ \varphi) \circ \pi) \circ h : P \to Q$ は C^∞ 写像である．したがって，φ は (5) の意味で C^∞ 写像. □

補題 4.6 (1) の意味の C^∞ 級写像 $h : \Lambda \to X \subseteq C^\infty(N, M)$ は連続写像である.

証明: $\exists H : \Lambda \times N \to M, C^\infty$, $H(\lambda, x) = h(\lambda)(x)$ とする.

$C^\infty(N, M)$ の中の $W(r, K, U)$ という形の開集合をとる．ここで，$K \subseteq N$ はコンパクト集合で，$U \subseteq J^r(N, M)$ は開集合である.

$\lambda_0 \in \Lambda, h(\lambda_0) = H|_{\lambda_0 \times N} : N \times M$ が $W(r, K.U)$ に属するとする．$j_1^r H : \Lambda \times N \to J^r(N, M)$ を $j_1^r H(\lambda, x) = j^r(H|_{\lambda \times N})(x)$ で定めると，$j_1^r H$ は (普通の意味で) C^∞ 写像．とくに連続であるから，$h(\lambda_0) \in W(r, K, U)$ という仮定から，$(j_1^r H)^{-1}(W(r, K, U))$ は $\lambda_0 \times K$ の開近傍であることがわかる．K はコンパクトなので，λ_0 の開近傍 V が存在して，$V \times K \subseteq (j_1^r H)^{-1}(W(r, K, U))$ となる．これは，$\lambda_0 \in V \subseteq h^{-1}(W(r, K, U))$ を意味する．したがって $h^{-1}(W(r, K, U))$ は開集合である．したがって[36]，h は連続である． □

注意 4.7 補題 4.6 は，Whitney C^∞ 位相に関しては成り立たない．

たとえば，$X = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ において，C^∞ 写像 $H(\lambda, x) := \lambda$ の決める C^∞ 写像 $h : \mathbf{R} \to C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ を考える．$h(0)$ は恒等的に 0 である関数である．グラフは $\mathbf{R} \times 0 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$．このとき，$\mathbf{R} \times 0$ を含む開集合 U で，$h^{-1}(W(U)) = \{0\}$ となるものがある．$W(U)$ は $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ の Whitney C^∞ 位相に関する開集合であるが，$h^{-1}(W(U)) = \{0\} \subset \mathbf{R}$ は，$\mathbf{R}$ の開集合でない．したがって，h は Whitney C^∞ 位相に関しては連続写像ではない．

注意 4.8 定義 (2) で,「任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to X$ に対して，合成 $k \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級」という条件だけからは，k の連続性は言えない．

たとえば，$X = \{1/n\} \cup \{0\} \subset \mathbf{R} = C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \mathbf{R})$, $Y = \{0, 1\} = C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \{0, 1\})$ とおく．写像 $k : X \to Y$ を $k(1/n) = 1, k(0) = 0$ で定める．すると，任意の C^∞ 級写像 $h : \Lambda \to X$ は，局所的に定数関数となり，$k \circ h : \Lambda \to Y$ も局所的に定数関数となるので，C^∞ 級である．しかし，k は連続写像でない．

そこで，(2) の定義で,「k が連続」という文言が必要になる．

4.4 性質

補題 4.9 M を有限次元 C^∞ 多様体とするとき，M と $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$ が微分同相である．

演習問題 4.10 M を有限次元 C^∞ 多様体とするとき，M と $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$ が微分同相であることを，上の定義 (1) から (7) に基づいて証明せよ．(ヒント：$\varphi : M \to C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$, $\varphi(x)(\mathrm{pt}) := x$, という写像と，$\psi : C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M) \to M$, $\psi(f) := f(\mathrm{pt})$ という写像がともに C^∞ 級であり，互いに逆写像になっていることを確かめるとよい)．

補題 4.11 (1) 恒等写像 $\mathrm{id} : X/\sim \to X/\sim$ は C^∞ 級写像である．(2) $f : X/\sim \to Y/\approx$, $g : Y/\approx \to Z/\equiv$ がともに C^∞ 級なら，合成 $g \circ f : X/\sim \to Z/\equiv$ も C^∞ 級である．

証明: id は連続写像なので，(1) は明らか．(2) f と g が連続だから，$g \circ f$ は連続．$m : \Lambda \to X/\sim$ を 任意の C^∞ 写像とする．すると，仮定から $f \circ m : \Lambda \to Y/\approx$ は C^∞ 写像．さらに仮定から，$g \circ (f \circ m) = (g \circ f) \circ m : \Lambda \to Z/\equiv$ は C^∞ 写像．したがって，$g \circ f$ は C^∞ 写像． □

補題 4.12 (1) 商写像 $\pi : X \to X/\sim$ は C^∞ 級である．(2) 写像 $f : X/\sim \to Y/\approx$ が C^∞ 級であるための必要十分条件は $f \circ \pi : X \to Y/\approx$ が C^∞ 級であることである．

証明: (1) π が連続なのは明らか．任意の C^∞ 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ に対し，$\ell \circ \pi : X \to Q$ は C^∞ 級．したがって，π は C^∞ 級．(2) f が連続である必要十分条件は $f \circ \pi$ が連続なことであ

[36] $h^{-1}(W(r, K, U) \cap W(r', K', U')) = h^{-1}(W(r, K, U)) \cap h^{-1}(W(r', K', U'))$, $h^{-1}(\cup W_\nu) = \cup h^{-1}(W_\nu)$.

る．f が C^∞ 級ならば，$f\circ\pi$ は C^∞ 級である．逆に $f\circ\pi$ が C^∞ 級と仮定し，任意の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx\ \to Q$ をとる．$\ell\circ(f\circ\pi) = (\ell\circ f)\circ\pi : X \to Q$ は C^∞ 級．よって $\ell\circ f$ は C^∞ 級．したがって f は C^∞ 級． $\square$

補題 4.13 N と N' が微分同相で，M と M' が微分同相ならば，$C^\infty(N, M)$ と $C^\infty(N', M')$ は微分同相である．

演習問題 4.14 $K \subset \mathbf{R}$ をコンパクト集合とする．写像 $I : C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ を $I(f) = \displaystyle\int_K f(x)dx$ で定義する．このとき I は C^∞ 写像であることを示せ．(ヒント：定義の (2) を確かめる)．

4.5 有限次元多様体の部分空間の商空間の微分構造

上の一般的な定義の特別な場合[37]であるが，確認のため定義をくり返そう[38]．

N を C^∞ 多様体，$S \subseteq N$ を部分集合，$\sim$ を S 上の同値関係とする．また，M, Λ, Q も C^∞ 多様体とする．

(1) 写像 $h : \Lambda \to S$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $h : \Lambda \to S \hookrightarrow N$ と考えたとき C^∞ 級．

(2) 写像 $k : S \to Q$ が C^∞ 級[39] $\overset{\text{def.}}{\iff}$ k が連続写像で，任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to S$ に対して，合成 $k\circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級．

(3) 写像 $\ell : S/\sim\ \to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\ell\circ\pi : S \to S/\sim \to Q$ が (2) の意味で C^∞ 級．

(4) 写像 $m : \Lambda \to S/\sim$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : S/\sim\ \to Q$ に対して，$\ell\circ m : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級．

(5) 写像 $\varphi : S/\sim\ \to T/\approx\ \leftarrow T \subseteq M$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ φ が連続写像で，かつ，任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : T/\approx\ \to Q$ に対して，$\ell\circ\varphi : S/\sim\ \to Q$ が (3) の意味の C^∞．

(6) 写像 $\varphi : S/\sim\ \to T/\approx$ が微分同相写像 (diffeomorphism) とは，φ が (5) の意味で C^∞ 級写像であり，全単射であり，逆写像 $\varphi^{-1} : T/\approx\ \to S/\sim$ も (5) の意味で C^∞ 級写像であるとき．

(7) 商空間 $S/\sim$ と $T/\approx$ が微分同相 (diffeomorphic) とは，微分同相写像 $\varphi : S/\sim\ \to T/\approx$ が存在するとき．

例 4.15 軌道体 (orbifold) **の微分構造．** 上の一般論から，$\mathbf{R}^n$ に作用する群 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の有限部分群 G に対して，“orbifold” $\mathbf{R}^n/G$ に微分構造が入る．

例 4.16 $\mathbf{R}/\sim$ は $\mathbf{R}_{\geq 0}$ と微分同相．ただし，$\sim$ は $\mathbf{R}$ 上の同値関係 $x \sim x' \Leftrightarrow x' = \pm x$ である．

実際 $\varphi : \mathbf{R}/\sim\ \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, $\varphi([x]) = x^2$, は微分同相写像である．というのは，$\varphi\circ\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, $(\varphi\circ\pi)(x) = x^2$ は (1) から (連続な) C^∞ 写像なので，(3) から φ は C^∞ 写像．逆写像は $\psi : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}/\sim$, $\psi(y) = [\sqrt{y}]$ である．これが C^∞ であるかどうかであるが，(5) に基づいて，任意の C^∞ 写像 $\ell : \mathbf{R}/\sim\ \to Q$ に対して $\ell\circ\psi : \mathbf{R}_{\geq 0} \to Q$ が C^∞ かどうか確認する．(3) から $\ell\circ\pi : \mathbf{R} \to Q$ は C^∞ 級で，$(\ell\circ\pi)(x) = (\ell\circ\pi)(-x)$ なので，ある C^∞ 写像 $\rho : \mathbf{R} \to Q$ が存在

[37] $S \subseteq N$ を $\{f : \{\mathrm{pt}\} \to N \mid f(\mathrm{pt}) \in S\} \subseteq C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, N)$ と同一視する．

[38] 良いことはくり返せ．

[39] 別の種類の定義もある：「N における S の 開近傍 U と，C^∞ 写像 $\bar{k} : U \to Q$ が存在して，$\bar{k}|_S = k$」(たとえば，Milnor, Topology from differentiable viewpoint を見よ)．S 上の写像の ”extension” に注目したこの定義と比べると，われわれの定義は，集合 S の ”parametrization” に注目した定義である．いわば，**parametric-minded** な定義と言える．

して，$(\ell\circ\pi)(x)=\rho(x^2)$ と表される．このとき，$(\ell\circ\psi)(y)=\ell([\sqrt{y}])=(\ell\circ\pi)(\sqrt{y})=\rho(y)$．したがって，$\ell\circ\psi$ は C^∞ 級． □

例 4.17 $\mathbf{R}^2$ に同値関係 $(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow(x',y')=\pm(x,y)$ を入れる．このとき，$\mathbf{R}^2/\sim$ は $\mathbf{R}^2$ と同相だが微分同相ではない．

$s:\mathbf{R}^2/\sim\ \to\mathbf{R}^2$, $s([(x,y)])=(x^2-y^2,2xy)$ は同相写像である．しかし s は微分同相写像ではない．他にも微分同相写像は存在しない．

実際，仮に C^∞ 写像 $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2/\sim$ と C^∞ 写像 $\varphi:\mathbf{R}^2/\sim\ \to\mathbf{R}^2$ があって，$\psi\circ\varphi=\mathrm{id},\varphi\circ\psi=\mathrm{id}$ が成り立つとすると矛盾が導かれる．というのは，もしそうなら，$\varphi\circ\pi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は C^∞ 級で，変換 $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ で不変なので，C^∞ 写像 $\rho:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ が存在して，$(\varphi\circ\pi)(x,y)=\rho(x^2,xy,y^2)$ が成立．C^∞ 級写像 $\Phi:\mathbf{R}^2/\sim\ \to\mathbf{R}^3$ があって，$(\Phi\circ\pi)(x,y)=(x^2,xy,y^2)$ つまり，$\varphi\circ\pi=\rho\circ\Phi\circ\pi$ が成立．π は全射だから，$\varphi=\rho\circ\Phi$ が成立．したがって，$\mathrm{id}=\varphi\circ\psi=\rho\circ(\Phi\circ\psi):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$．ところが，$\Psi:=\Phi\circ\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ の像は $\{(x^2,xy,y^2)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2\}=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{R}^3\mid XZ-Y^2=0\}$ に含まれるので，$\mathrm{rank}_0\Psi\le 1$ であり矛盾． □

例 4.18 複素共役による商空間の微分構造[40]$\mathrm{conj}:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$, $\mathrm{conj}(z)=\overline{z}$, を複素共役とする．商空間 $\mathbf{C}/\mathrm{conj}$ は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_{\ge 0}$ と微分同相．$\mathbf{C}^2/\mathrm{conj}$ は $\mathbf{R}^4$ と同相であり，$\mathbf{R}^4$ と微分同相でない．そこで，改めて $\mathbf{R}^4$ から誘導される微分構造を $\mathbf{C}^2/\mathrm{conj}$ に入れる．同じ発想で，$\mathbf{C}P^2/\mathrm{conj}$ に微分構造を入れると，S^4 と微分同相である (Kuiper, Massey, Arnold の定理)．

4.6 積空間

$X\subseteq C^\infty(N,M),Y\subseteq C^\infty(L,P)$ に対し，

$$X\times Y=\{F\in C^\infty(N\amalg L,M\amalg P)\mid F(N)\subseteq M,F(L)\subseteq P\}$$

とみなす[41]．そして，$X/\sim\ \times Y/\approx$ を $(X\times Y)/\equiv$ と同一視する．ただし，$(f,g)\equiv(f',g')\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}f\sim f'$, かつ，$g\approx g'$．こうして，写像商空間の直積は写像商空間とみなされる．

例 4.19 $C^\infty(N,M)\times N\to M$, $(f,x)\mapsto f(x)$ は C^∞ 写像である[42]．

演習問題 4.20 例 4.19 の主張を定義にしたがって確かめてみよ．

補題 4.21 $\Phi:C^\infty(N,M)\times C^\infty(M,L)\to C^\infty(N,L)$, $\Phi(f,g)=g\circ f$ は C^∞ 写像である．

証明: Φ の連続性は，命題 3.5 から従う．さて，$h:\Lambda\to C^\infty(N,M)\times C^\infty(M,L)$ を C^∞ 写像とする．C^∞ $H:\Lambda\times(N\amalg M)\to M\amalg L$ が h と定義しているとする．$H(\Lambda\times N)\subseteq M,H(\Lambda\times M)\subseteq L$ が成り立つ．$F:=H|_{\Lambda\times N},G:=H|_{\Lambda\times M}$ とおく．$f_\lambda(x)=F(\lambda,x),g_\lambda(f_\lambda(x))=g_\lambda(F(x,\lambda)=G(\lambda,F(\lambda,x))$ は C^∞ 級． □

[40]徳永・島田・石川・齋藤・福井著「代数曲線と特異点」特異点の数理４，pp.324–329. を参照.

[41]$N\amalg L$ は N と L の disjoint union.

[42]$f_n\to f,x_n\to x$ のとき，$f_n(x_n)\to f(x)$, $(n\to\infty)$ であり，しかも $f(x)$ は f に関しても x に関しても C^∞ 級であるという意味あい.

5　「例に始まり例に終わる」

「美しいものは皆，写像空間の特異点である」その例をいくつか紹介する．いままでの理論の適用例である．

5.1　3角形空間

$N = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ を3点からなる 0 次元多様体とする．(N に離散位相を入れる)．$M = \mathbf{R}^2$ とする．

$C^\infty(N, M)$ は $f \mapsto (f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$ という対応によって $\mathbf{R}^6$ と微分同相である．そして，

$$\mathcal{T} := \{f \in C^\infty(N, M) \mid f(\alpha), f(\beta), f(\gamma) \text{ は一直線上にない }\}$$

とおく．$\mathcal{T}$ は「3角形の全体の空間」である．$\mathcal{T}$ は $\mathbf{R}^6$ の開集合,

$$\{(a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2) \in \mathbf{R}^6 \mid \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0\}$$

と同一視される．

さて，3角形を合同変換で分類しよう．つまり $\mathbf{R}^2$ に通常のユークリッド計量を入れ[43]，$\mathbf{R}^2$ のユークリッド運動群 (合同変換群**ここでは，裏返しも考える**) を $\mathrm{Euclid}(\mathbf{R}^2)$ で表す：

$$\mathrm{Euclid}(\mathbf{R}^2) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P & a & b \\ Q & c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; (P, Q) \in \mathbf{R}^2, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{は2次の直交行列} \right\}$$

であり，$A = (x_1, x_2) \in R^2$ に対し

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P & a & b \\ Q & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ ax_1 + bx_2 + P \\ cx_1 + dx_2 + Q \end{pmatrix}$$

で作用する．つまり $g(A) = g(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + P, cx_1 + dx_2 + Q)$ である．さて，$G = S_3 \times \mathrm{Euclid}(\mathbf{R}^2)$ とおく．ここで S_3 は3次の対称群 (この場合 $\mathrm{Diff}(N)$) である．群 G の $C^\infty(N, M) \cong \mathbf{R}^6$ への作用を，$(A, B, C) \in \mathbf{R}^6$ に対し，$(\sigma, g)(A, B, C) = \sigma(g(A), g(B), g(C))$ (置換 σ による入れ替え) で定める．このとき，$\mathcal{T} \subset C^\infty(N, M)$ は G-不変集合である．商空間 $\mathcal{T}/G$ は「3角形の合同類の空間」である．

定理 5.1　3角形の合同類の空間 $\mathcal{T}/G$ は $\mathbf{R}_{>0} \times C$ と微分同相である．ただし,

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^3 \leq 0\}$$

はカスプ曲線の定める狭い方の領域 (境界も含む) である．とくに，3角形の合同類の空間は $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_{\geq 0} = \{(x, y, z) \mid z \geq 0\}$ と同相である．

[43] デカルトの時代からユークリッドへさかのぼり

$\mathbf{R}_{>0} \times C$ の $\mathbf{R}_{>0}$ の部分は，相似比のパラメータである．C の頂点が正３角形の合同類に対応し，縁の部分は，２等辺３角形の合同類に対応する．

定理 5.1 **の証明**: ３角形の３辺の長さを対応させる写像 $\mathbf{R}^6 \supset \mathcal{T} \ni (A,B,C) \mapsto (BC, CA, AB) \in (\mathbf{R}_{>0})^3$ は，写像 $\Phi_1 : \mathcal{T}/G \to (\mathbf{R}_{>0})^3/S_3$ を誘導する．ここで，S_3 は３次対称群である．さらに，写像 $V : (\mathbf{R}_{>0})^3 \to (\mathbf{R}_{>0})^3$ を基本対称式を使って，$V(a,b,c) := (a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ とおくと，V は写像 $\bar{V} : (\mathbf{R}_{>0})^3/S_3 \to (\mathbf{R}_{>0})^3$ を誘導する．$\bar{V}$ の像を X とおくと，このとき，$\Phi := \bar{V} \circ \Phi_1 : \mathcal{T}/G \to X$ は微分同相写像であることがわかる．さらに，X は $\mathbf{R}_{>0} \times C$ と微分同相である． □

5.2 微分同相群

N をコンパクト境界なしの C^∞ 多様体とする．このとき，N の C^∞ 微分同相写像のなす群 $\mathrm{Diff}^\infty(N)$ は C^∞ 位相に関して位相群である．また，合成 $m : \mathrm{Diff}^\infty(N) \times \mathrm{Diff}^\infty(N) \to \mathrm{Diff}^\infty(N), m(\varphi,\psi) = \psi \circ \varphi$ や逆元をとる写像 $i : \mathrm{Diff}^\infty(N) \to \mathrm{Diff}^\infty(N), i(\varphi) = \varphi^{-1}$ は C^∞ 写像．したがって，この意味で，$\mathrm{Diff}^\infty(N)$ は (無限次元) Lie 群であると見なされる．

5.3 結び目空間

$\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3) \subset C^\infty(S^1, \mathbf{R}^3)$ は開集合．$G := \mathrm{Diff}^\infty(S^1) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}^3)$ とおくと，群 G は $C^\infty(S^1, \mathbf{R}^3)$ に，$(\sigma,\tau)f := \tau \circ f \circ \sigma^{-1}$ で作用する．$\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3)$ は G-作用で不変な集合である．したがって，G は $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3)$ 上にも作用する．

命題 5.2 商空間 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3)/G$ は可算無限離散空間と C^∞ 微分同相.

したがって，商空間の微分構造から見れば，すべての結び目は平等である．たとえば「自明な結び目」という概念を定義するには，埋め込まれた円盤の境界となる，という “大域的”で具体的な定義が必要となる[44].

同様の発想で，パラメトリック平面曲線の空間 $C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ の開集合

$$\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2) := \{ f \in C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2) \mid f \text{ はジェネリック} \}$$

を考える．ただし，平面曲線 $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ がジェネリック (generic) とは，はめ込み (immersion) であって，自己交差が，横断的な交差に限るときにいう．$G := \mathrm{Diff}^\infty(S^1) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}^2)$ が $C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ に作用し，$\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2)$ は G-不変になる．

命題 5.3 商空間 $\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2)/G$ は可算無限離散空間と C^∞ 微分同相[45].

[44] 埋め込みの空間ではなく，はめこみの空間 $\mathrm{Imm}(S^1, \mathbf{R}^3)$ の商空間 $\mathrm{Imm}(S^1, \mathbf{R}^3)/G$ を考えれば，これは離散空間にはならない．いわゆる結び目の Vassiliev 不変量 (V.A. Vassiliev, Knot invariants and singularity theory. Singularity theory (Trieste, 1991), 904–919, World Sci. Publishing, 1995.; V.A. Vassiliev, Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications, Rivised Edition, Trabsl. Math. Mono. vol. 98, Amer. Math. Soc. 1994.) は，離散空間 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^3)/G$ の非離散空間 $\mathrm{Imm}(S^1, \mathbf{R}^3)/G$ への埋め込みを利用した結び目不変量であると捉えることができる．

[45] これに比べて，$\mathrm{Imm}(S^1, \mathbf{R}^2)/G$ は非離散空間である．平面曲線の Arnold 不変量 (V.I. Arnold, Topological Incariants of Plane Curves and Caustics, Univ. Lect. Series 5, Amer. Math. Soc. 1994.) は，この非離散空間への $\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2)/G$ の埋め込みを利用して得られる不変量であると捉えることができる．

5.4 リーマン構造のスーパー空間

N を n 次元 C^∞ 多様体とする．$\mathcal{R}_N := \{N$ 上の Riemann 計量 $\}$ とおくと，これは写像空間と考えられる．実際，リーマン計量とは，各点 $x \in N$ に対して，(x に C^∞ に依存する) 正値対称双線形関数 $g_x : T_xN \times T_xN \to \mathbf{R}$ を定めることであるが，これは C^∞ 切断 $g : N \to T^*N \odot T^*N$ (で精緻性を持つもの) によって与えられるので，$\mathcal{R}_N \subset C^\infty(N, T^*N \odot T^*N)$ と見なされる．ただし，$T^*N \odot T^*N$ は N の余接束 T^*N の対称テンソル積である．

空間 $\mathcal{R}_N$ に群 $\mathrm{Diff}(N)$ が自然に作用する．その商空間 (軌道空間) $\mathcal{S}_N := \mathcal{R}_N/\mathrm{Diff}(N)$ は，N 上のリーマン構造の同型類の全体の空間である[46]．

射影 $\pi : \mathcal{R}_N \to \mathcal{S}_N$ は C^∞ 写像である．１つの同型類 $[g] \in \mathcal{S}_N$ 上のファイバー $\pi^{-1}([g])$ は (N, g) の等長変換群 $\mathrm{Isom}(N, g)$ と微分同相である．

定理 5.4 $N = S^1$ について，$\mathcal{S}_{S^1}$ は $\mathbf{R}_{>0}$ と (したがって $\mathbf{R}$ と) 微分同相である[47]．

一般の多様体 N について $\mathcal{S}_N$ を決定することが問題となるが，$\dim N \geq 2$ の場合 $\mathcal{S}_N$ は「無限次元空間」となる．たとえば，$\dim N = 2$ の場合，N 上のガウス曲率 $K : N \to \mathbf{R}$ の (右同値類) は，$\mathcal{S}_N$ 上の関数モデュライを与える．(どのような関数がガウス曲率として現れるか，問題はもちろん難しく，未解決の問題．)

ところで，$N = S^2$ のリーマン計量の中で，通常の “まんまるな” 球面 (つまり，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の中の球面として誘導される計量を与えたもの) が一番美しいと思われる．「美しいものは皆，写像空間の特異点である」という美学と関係して，次の問題が考えられる．

演習問題 5.5 「S^2 上の標準計量 g_0 について，$(\mathcal{S}_{S^2}, [g_0])$ と $(\mathcal{S}_{S^2}, [g])$ が微分同相ならば，$[g_0] = [g]$ つまり，計量 g は標準計量と等長的」ということに証明を付けよ．

5.5 平面曲線のシンプレクティック・モジュライ空間

$\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^2) \subset C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ を平面上の C^∞ 単純閉曲線の空間とする．$\mathrm{Symp}(\mathbf{R}^2)$ を $\mathbf{R}^2$ の標準シンプレクティック形式 $\omega_0 = dx \wedge dy$ を保存する C^∞ 微分同相写像の全体のなす群とする．$H = \mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Symp}(\mathbf{R}^2)$ は 空間 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^2)$ に自然に作用する．つまり，$(\sigma, \tau)f := \tau \circ f \circ \sigma^{-1}$ とおく．商空間 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^2)/H$ は単純閉曲線のシンプレクティック同型類の全体の空間と見なされる．

命題 5.6 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbf{R}^2)/H$ は $\mathbf{R}_{\geq 0}$ と微分同相である[48]．

再び $C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ の開集合

$$\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2) := \{f \in C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2) \mid f \text{ はジェネリック } \}$$

を考える．群 $H = \mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Symp}(\mathbf{R}^2)$ は $\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2)$ にも作用する．また，$G = \mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Diff}^+(\mathbf{R}^2)$ も $\mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2)$ に作用する．ただし，$\mathrm{Diff}^+(\mathbf{R}^2)$ は平面の向きを保つ C^∞ 微分同相

[46] スーパー空間 (super space) とも呼ばれる．基本的文献は，A.E.Fischer, Resolving the singularities in the space of Riemannian geometries, J. Math. Phys., **27** (1986), 718–738. J.-P. Bourguignon, Une stratification de l'espace des structures Riemanniennes, Compositio Math., **30** (1975), 1–41.

[47] $\mathbf{R}_{>0}$ は１次元 Riemann 多様体の「全長」という不変量に対応.

[48] $\mathbf{R}_{\geq 0}$ は「曲線の囲む面積」に対応.

写像の全体のなす群である．各 $f \in \mathrm{Gen}(S^1, \mathbf{R}^2)$ の G-軌道 $G \cdot f$ を考える．$G \cdot f$ に H が作用する．いま，$f : S^1 \mathbf{R}^2$ の像 $f(S^1)$ は $\mathbf{R}^2$ をいくつかの領域に分けるが，有界な領域に適当にラベルをつけておく (図 3)．すると，各 $f' \in G \cdot f$ の像が分ける有界領域たちにもラベルがつく．

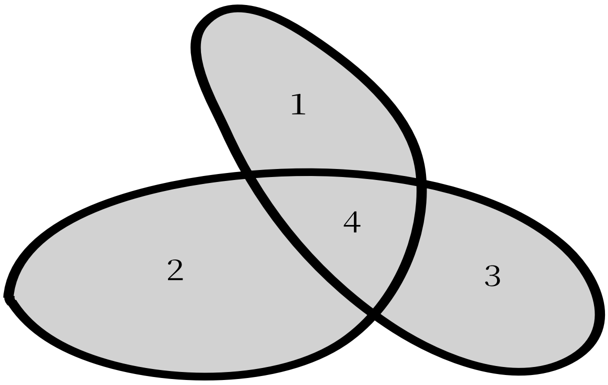

図 3: ラベル付け

そこで，

$f', f'' \in G \cdot f$ について $f' \sim f'' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists(\sigma, \tau) \in H,\ f'' = \tau \circ f' \circ \sigma^{-1}$ であって，かつ，τ が領域のラベルを保つ．

商空間 $\mathcal{M}(f) := (G \cdot f)/\sim$ を平面曲線 f の**シンプレクティック・モデュライ空間**と呼ぶ．

命題 5.7 平面曲線 f のシンプレクティック・モデュライ空間 $\mathcal{M}(f) = (G \cdot f)/\sim$ は $(\mathbf{R}_{>0})^r$ と (したがって $\mathbf{R}^r$ と) 微分同相である[49]．ただし，r は $f(\mathbf{R}^2)$ が囲む有界領域の個数である．

[49] $(\mathbf{R}_{>0})^r$ は，各有界領域の面積に対応.