写像空間のトポロジーと幾何と特異点論

石川 剛郎 (北大・理)

２００４年１０月〜２００５年１月, No. ４

4　「正しい呪文 (じゅもん) を唱えれば誰でも使える魔法の数学」

写像空間とその商空間に微分構造を入れる１つの方法を紹介する[1].

4.1　構造とは?

$\{X_\nu\}$ を集合族とする[2].

$\{X_\nu\}$ 等に”微分構造”を入れるためには，各 $X_\nu, X_{\nu'}$ について，とにかく $X_\nu, X_{\nu'}$ が “微分同相” かどうかが判定できればよい．そのためには，与えられた写像 $\Phi : X_\nu \to X_{\nu'}$ が “C^∞ 級” であるかどうかが判定できればよい.

では，たとえば，写像 $\Phi : C^\infty(N, M) \to C^\infty(L, W)$ (L, W も多様体) が “C^∞ 級” とはどう定義すればよいだろうか？

各写像 $f \in C^\infty(N, M)$ に対し，写像 $\Phi(f) \in C^\infty(L, W)$ が定まっている．いま，Φ が C^∞ 級というのを，任意の “C^∞ 族 (family)” $h_\lambda \in C^\infty(N, M)$ に対し，$\Phi(h_\lambda) \in C^\infty(L, W)$ が “C^∞ 族” であることを条件としたい[3]．ここで，パラメータ λ は有限次元多様体 Λ 上を動き，$h_\lambda : N \to M$, $(\lambda \in \Lambda)$ が “C^∞ 族” とは，ある C^∞ 写像 $H : \Lambda \times N \to M$ があって $h_\lambda(x) = H(\lambda, x), (\lambda, x) \in \Lambda \times N$ ということである[4].

さて，そうすると，$\Phi(h_\lambda) \in C^\infty(L, W)$ に対して，C^∞ 写像 $G : \Lambda \times L \to W$ があって，$\Phi(h_\lambda)(x') = G(\lambda, x'), (\lambda, x') \in L \times W$ と表される．したがって，$\Phi(h_\lambda)$ の変数 λ による微分が考えられて便利である.

4.2　有限次元方向微分可能性

もう一例を考察しよう．関数 $\Psi : C^\infty(L, W) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級とは，どう定義したらよいだろうか？写像 $g \in C^\infty(L, W)$ に対して，実数値 $\Psi(g)$ が定まっている．有限次元 C^∞ 族 $g_\lambda \in C^\infty(L, W), \lambda \in \Lambda$ に対して，変数 λ の関数 $\Psi(g_\lambda)$ が定まっている．Ψ が C^∞ 級とは，関数 $\Psi(g_\lambda)$ が λ に関して C^∞ 級のときであると定める．各 $g_\lambda \in C^\infty(L, W)$ を空間 $C^\infty(L, W)$ の点であるとみなすと，写像族 $g_\lambda \in C^\infty(L, W)$ は，空間 $C^\infty(L, W)$ の中の “有限次元部分空間”とみなされ，そこに関数 Ψ を制限したものが，$\Psi(g_\lambda)$ で

[1]微分構造を入れる方法はいくつか知られている．たとえば，フレッシェ微分に基づいた方法がある (Eells の方法)．また，大森英樹さんが創った”ILB 多様体”(inverse limit Banach manifold) の概念などが有名．ただし，私 (石川) の知る限り，ここに述べる方法のように汎用性がある方法は今までになかったと思う.

[2]各 X_ν は，多様体のある部分空間のある商空間や，ある多様体 N, M の C^∞ 写像空間 $C^\infty(N, M)$ のある部分空間のある商空間を主に想定している.

[3]実際は，Φ が連続であるという条件も要請する.

[4]これは大域解析や微分トポロジーなどでよく使う概念である．このとき，写像 $h : \Lambda \to C^\infty(N, M)$, $h(\lambda) = h_\lambda$, を C^∞ 級であるという.

ある．その微分可能性に着目するのである．つまり，ここで定めた微分可能性は，いわば「有限次元方向微分可能性」である[5]．

注意 4.1 上の定義が自然であるかどうか思考実験してみよう．

(1) $\Phi : C^\infty(N,M) \to C^\infty(L,W)$ が C^∞ 級で，$\Psi : C^\infty(L,W) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級のとき，合成 $\Psi \circ \Phi : C^\infty(N,M) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級になるかどうかを確かめてみましょう．

任意の C^∞ 族 $h_\lambda \in C^\infty(N,M)$ に対して，$(\Psi \circ \Phi)(h_\lambda)$ が λ について C^∞ 級であるかどうかであるが，$(\Psi \circ \Phi)(h_\lambda) = \Psi(\Phi(h_\lambda))$ であり，$\Phi : C^\infty(N,M) \to C^\infty(L,W)$ が C^∞ 級なので，$\Phi(h_\lambda)$ が C^∞ 級であり，Ψ が C^∞ 級なので，$\Psi(\Phi(h_\lambda))$ が C^∞ 級であるから，$(\Psi \circ \Phi)(h_\lambda)$ は C^∞ である．

(2) $\Psi : C^\infty(L,W) \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級ということを定義したが，一方，$\mathbf{R}$ は $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \mathbf{R})$ と同一視されるので，$\Psi : C^\infty(L,W) \to C^\infty(\mathrm{pt}, \mathbf{R})$ であるとみなしたときに，C^∞ 級になるかどうか，ということを確かめてみよう．任意の C^∞ 族 $g_\lambda \in C^\infty(L,W)$ に対し，$\Psi(g_\lambda)$ が λ について C^∞ 級関数であるが，$H : \Lambda \times \{\mathrm{pt}\} \to \mathbf{R}$ を $H(\lambda, \mathrm{pt}) = \Psi(g_\lambda)$ で定めれば H は C^∞ であり，定義から $\Psi : C^\infty(L,W) \to C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \mathbf{R})$ は C^∞ 級である．

例 4.2 写像 $\Psi : C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}$ を $\Psi(f) := \int_{S^1} f^*(xdy)$，ただし，$x, y$ は $\mathbf{R}^2$ の座標，で定める．このとき，Ψ は C^∞ 級である．

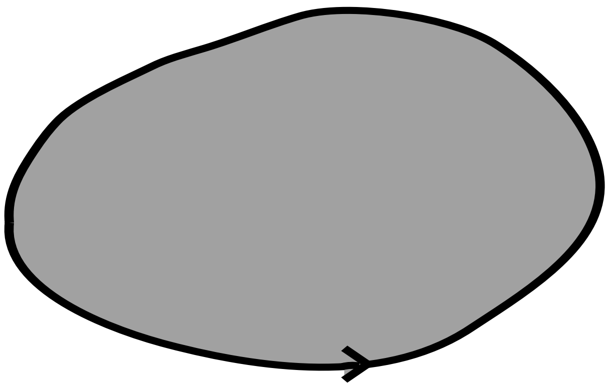

図 1: 曲線が囲む面積

演習問題 4.3 上の例を確かめよ．

4.3 写像商空間の微分構造

N, M, L, P をそれぞれ n, m 次元 C^∞ 多様体とする．また，Λ, Q も有限次元 C^∞ 多様体を表すこととする．

$X \subseteq C^\infty(N,M)$ を部分集合とする．このような集合 X を**写像空間**という．

(1) 写像 $h : \Lambda \to X$ が C^∞ 級 $\overset{\mathrm{def.}}{\iff}$ C^∞ 写像 $H : \Lambda \times N \to M$ があって $H(\lambda, x) = h(\lambda)(x) \in M$, $(\lambda \in \Lambda, x \in N)$.
(2) 写像 $k : X \to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\mathrm{def.}}{\iff}$ k が連続写像で，任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to X$ に対して，合成 $k \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級.

[5]人間にわかるの所詮有限次元.

さらに，$\sim$ を X 上の同値関係とするとき，$X/\sim$ で商空間を表す．このような商空間 $X/\sim$ を **写像商空間**という．射影 $\pi : X \to X/\sim$ を $\pi(x) = [x]$ (x の属する同値類) で定める．

(3) 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\ell \circ \pi : X \to Q$ が (2) の意味で C^∞ 級.
(4) 写像 $m : \Lambda \to X/\sim$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ に対して，$\ell \circ m : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級.

補題 4.4 $h : \Lambda \to X$ が (1) の意味で C^∞ 級ならば $\pi \circ h : \Lambda \to X/\sim$ は (4) の意味で C^∞ 級.

証明: 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : X/\sim \to Q$ について，$\ell \circ \pi : X \to Q$ は (2) の意味で C^∞ 級．したがって，$(\ell \circ \pi) \circ h = \ell \circ (\pi \circ h) : \Lambda \to Q$ は C^∞ 級．したがって (4) の意味で，$\pi \circ h$ は C^∞ 級である．
□

(5) 一般に，写像商空間 $X/\sim$ から別の写像商空間 $Y/\approx \leftarrow Y \subseteq C^\infty(L, P)$ への写像 $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ φ が連続写像で，かつ，任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx \to Q$ に対して，$\ell \circ \varphi : X/\sim \to Q$ が (3) の意味で C^∞ 写像.
(6) 写像 $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が微分同相写像 (diffeomorphism) とは，φ が (5) の意味で C^∞ 級写像であり，全単射であり，逆写像 $\varphi^{-1} : Y/\approx \to X/\sim$ も (5) の意味で C^∞ 級写像であるときにいう.
(7) 写像商空間 $X/\sim$ と $Y/\approx$ が微分同相 (diffeomorphic) とは，微分同相写像 $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が存在するときにいう.

補題 4.5 次は同値である：

(i) $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が (5) の意味で C^∞ 級.

(ii) $\varphi : X/\sim \to Y/\approx$ が連続写像であり，任意の (4) の意味の C^∞ 写像 $m : \Lambda \to X/\sim$ に対して，$\varphi \circ m : \Lambda \to Y/\approx$ が (4) の意味で C^∞ 級.

証明: (i) $\Rightarrow$ (ii) : 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx \to Q$ に対して (i) から $\ell \circ \varphi : X/\sim \to Q$ は (3) の意味で C^∞ 級．したがって $(\ell \circ \varphi) \circ m = \ell \circ (\varphi \circ m) : P \to Q$ は C^∞ 級．よって，$\varphi \circ m : \Lambda \to Y/\approx$ は (4) の意味で C^∞ 級.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell : Y/\approx \to Q$ について，$\ell \circ \varphi : X/\sim \to Q$ が (3) の意味で C^∞ 級かどうか調べる．つまり $(\ell \circ \varphi) \circ \pi : X \to Q$ が (2) の意味で C^∞ 級かどうか調べる．そこで，任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to X$ について $((\ell \circ \varphi) \circ \pi) \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 写像かどうか調べる．ところで，補題 4.4 から，$\pi \circ h : \Lambda \to X/\sim$ は (4) の意味で C^∞ 級．よって (ii) から $(\varphi \circ \pi) \circ h = \varphi \circ (\pi \circ h) : \Lambda \to Y/\approx$ は (4) の意味で C^∞ 級．したがって，$\ell \circ (\varphi \circ \pi) \circ h = ((\ell \circ \varphi) \circ \pi) \circ h : P \to Q$ は C^∞ 写像である．したがって，φ は (5) の意味で C^∞ 写像. □

補題 4.6 (1) の意味の C^∞ 級写像 $h : \Lambda \to X \subseteq C^\infty(N, M)$ は連続写像である.

証明: $\exists H : \Lambda \times N \to M, C^\infty$, $H(\lambda, x) = h(\lambda)(x)$ とする.

$C^\infty(N, M)$ の中の $W(r, K, U)$ という形の開集合をとる．ここで，$K \subseteq N$ はコンパクト集合で，$U \subseteq J^r(N, M)$ は開集合である.

$\lambda_0 \in \Lambda, h(\lambda_0) = H|_{\lambda_0 \times N} : N \times M$ が $W(r, K.U)$ に属するとする．$j_1^r H : \Lambda \times N \to J^r(N, M)$ を $j_1^r H(\lambda, x) = j^r(H|_{\lambda \times N})(x)$ で定めると，$j_1^r H$ は (普通の意味で) C^∞ 写像．とくに連続であるから，$h(\lambda_0) \in W(r, K, U)$ という仮定から，$(j_1^r H)^{-1}(W(r, K, U))$ は $\lambda_0 \times K$ の開近傍であることがわかる．K はコンパクトなので，λ_0 の開近傍 V が存在して，$V \times K \subseteq (j_1^r H)^{-1}(W(r, K, U))$ となる．これは，$\lambda_0 \in V \subseteq h^{-1}(W(r, K, U))$ を意味する．したがって $h^{-1}(W(r, K, U))$ は開集合である．したがって[6]，h

[6] $h^{-1}(W(r, K, U) \cap W(r', K', U')) = h^{-1}(W(r, K, U)) \cap h^{-1}(W(r', K', U'))$, $h^{-1}(\cup W_\nu) = \cup h^{-1}(W_\nu)$.

は連続である． □

注意 4.7 補題 4.6 は，Whitney C^∞ 位相に関しては成り立たない．

たとえば，$X = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ において，C^∞ 写像 $H(\lambda, x) := \lambda$ の決める C^∞ 写像 $h : \mathbf{R} \to C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ を考える．$h(0)$ は恒等的に 0 である関数である．グラフは $\mathbf{R} \times 0 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. このとき，$\mathbf{R} \times 0$ を含む開集合 U で，$h^{-1}(W(U)) = \{0\}$ となるものがある．$W(U)$ は $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ の Whitney C^∞ 位相に関する開集合であるが，$h^{-1}(W(U)) = \{0\} \subset \mathbf{R}$ は，$\mathbf{R}$ の開集合でない．したがって，h は Whitney C^∞ 位相に関しては連続写像ではない．

注意 4.8 定義 (2) で,「任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to X$ に対して，合成 $k \circ h : \Lambda \to Q$ が C^∞ 級」という条件だけからは，k の連続性は言えない．

たとえば，$X = \{1/n\} \cup \{0\} \subset \mathbf{R} = C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \mathbf{R})$, $Y = \{0, 1\} = C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, \{0, 1\})$ とおく．写像 $k : X \to Y$ を $k(1/n) = 1, k(0) = 0$ で定める．すると，任意の C^∞ 級写像 $h : \Lambda \to X$ は，局所的に定数関数となり，$k \circ h : \Lambda \to Y$ も局所的に定数関数となるので，C^∞ 級である．しかし，k は連続写像でない．

そこで，(2) の定義で,「k が連続」という文言が必要になる．

4.4 性質

補題 4.9 M を有限次元 C^∞ 多様体とするとき，M と $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$ が微分同相である．

演習問題 4.10 M を有限次元 C^∞ 多様体とするとき，M と $C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$ が微分同相であることを，上の定義 (1) から (7) に基づいて証明せよ．(ヒント：$\varphi : M \to C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$, $\varphi(x)(\mathrm{pt}) := x$, という写像と，$\psi : C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M) \to M$, $\psi(f) := f(\mathrm{pt})$ という写像がともに C^∞ 級であり，互いに逆写像になっていることを確かめるとよい)．

補題 4.11 (1) 恒等写像 $\mathrm{id} : X/\!\sim \to X/\!\sim$ は C^∞ 級写像である．(2) $f : X/\!\sim \to Y/\!\approx$, $g : Y/\!\approx \to Z/\!\equiv$ がともに C^∞ 級なら，合成 $g \circ f : X/\!\sim \to Z/\!\equiv$ も C^∞ 級である．

証明: id は連続写像なので，(1) は明らか．(2) f と g が連続だから，$g \circ f$ は連続．$m : \Lambda \to X/\!\sim$ を 任意の C^∞ 写像とする．すると，仮定から $f \circ m : \Lambda \to Y/\!\approx$ は C^∞ 写像．さらに仮定から，$g \circ (f \circ m) = (g \circ f) \circ m : \Lambda \to Z/\!\equiv$ は C^∞ 写像．したがって，$g \circ f$ は C^∞ 写像． □

補題 4.12 (1) 商写像 $\pi : X \to X/\!\sim$ は C^∞ 級である．(2) 写像 $f : X/\!\sim \to Y/\!\approx$ が C^∞ 級であるための必要十分条件は $f \circ \pi : X \to Y/\!\approx$ が C^∞ 級であることである．

証明: (1) π が連続なのは明らか．任意の C^∞ 写像 $\ell : X/\!\sim \to Q$ に対し，$\ell \circ \pi : X \to Q$ は C^∞ 級．したがって，π は C^∞ 級．(2) f が連続である必要十分条件は $f \circ \pi$ が連続なことである．f が C^∞ 級ならば，$f \circ \pi$ は C^∞ 級である．逆に $f \circ \pi$ が C^∞ 級と仮定し，任意の C^∞ 写像 $\ell : Y/\!\approx \to Q$ をとる．$\ell \circ (f \circ \pi) = (\ell \circ f) \circ \pi : X \to Q$ は C^∞ 級．よって $\ell \circ f$ は C^∞ 級．したがって f は C^∞ 級． □

補題 4.13 N と N' が微分同相で，M と M' が微分同相ならば，$C^\infty(N, M)$ と $C^\infty(N', M')$ は微分同相である．

証明: $\sigma : N \to N'$, $\tau : M \to M'$ を微分同相写像とする．$\varphi : C^\infty(N, M) \to C^\infty(N', M')$ を $\varphi(f) := \tau \circ f \circ \sigma^{-1}$ で定義する．φ は C^∞ 級である．実際まず，φ は連続である．また，任意の C^∞ 写像 $h : \Lambda \to$

$C^\infty(N,M)$ について，h を定義する C^∞ 写像 $H:\Lambda\times N\to M$ に対し，$H':=\tau\circ H\circ(\mathrm{id}_\Lambda\times\sigma^{-1}):\Lambda\times N'\to M'$ とおく．この C^∞ 写像 H' は写像 $\varphi\circ h:\Lambda\to C^\infty(N',M')$ を定義しているので，$\varphi\circ h$ は C^∞ 写像である．したがって，φ は C^∞ 写像である．対称性から，$\psi: C^\infty(N',M')\to C^\infty(N,M)$ を $\psi(g):=\tau^{-1}\circ g\circ\sigma$ とおけば，ψ は C^∞ 写像であり，φ の逆写像である．したがって，φ は微分同相写像である． □

演習問題 4.14 $K\subset\mathbf{R}$ をコンパクト集合とする．写像 $I: C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ を $I(f)=\displaystyle\int_K f(x)dx$ で定義する．このとき I は C^∞ 写像であることを示せ．(ヒント：定義の (2) を確かめる)．

4.5 有限次元多様体の部分空間の商空間の微分構造

上の一般的な定義の特別な場合[7]であるが，確認のため定義をくり返そう[8]．

N を C^∞ 多様体，$S\subseteq N$ を部分集合，$\sim$ を S 上の同値関係とする．また，M,Λ,Q も C^∞ 多様体とする．

(1) 写像 $h:\Lambda\to S$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $h:\Lambda\to S\hookrightarrow N$ と考えたとき C^∞ 級.

(2) 写像 $k: S\to Q$ が C^∞ 級[9] $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ k が連続写像で，任意の (1) の意味の C^∞ 写像 $h:\Lambda\to S$ に対して，合成 $k\circ h:\Lambda\to Q$ が C^∞ 級.

(3) 写像 $\ell: S/\!\sim\,\to Q$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\ell\circ\pi: S\to S/\!\sim\,\to Q$ が (2) の意味で C^∞ 級.

(4) 写像 $m:\Lambda\to S/\!\sim$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell: S/\!\sim\,\to Q$ に対して，$\ell\circ m:\Lambda\to Q$ が C^∞ 級.

(5) 写像 $\varphi: S/\!\sim\,\to T/\!\approx\,\leftarrow T\subseteq M$ が C^∞ 級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ φ が連続写像で，かつ，任意の (3) の意味の C^∞ 写像 $\ell: T/\!\approx\,\to Q$ に対して，$\ell\circ\varphi: S/\!\sim\,\to Q$ が (3) の意味の C^∞.

(6) 写像 $\varphi: S/\!\sim\,\to T/\!\approx$ が微分同相写像 (diffeomorphism) とは，φ が (5) の意味で C^∞ 級写像であり，全単射であり，逆写像 $\varphi^{-1}: T/\!\approx\,\to S/\!\sim$ も (5) の意味で C^∞ 級写像であるとき.

(7) 商空間 $S/\!\sim$ と $T/\!\approx$ が微分同相 (diffeomorphic) とは，微分同相写像 $\varphi: S/\!\sim\,\to T/\!\approx$ が存在するとき.

例 4.15 軌道体 (orbifold) **の微分構造．**上の一般論から，$\mathbf{R}^n$ に作用する群 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ の有限部分群 G に対して，“orbifold” $\mathbf{R}^n/G$ に微分構造が入る．

例 4.16 $\mathbf{R}/\!\sim$ は $\mathbf{R}_{\geq 0}$ と微分同相．ただし，$\sim$ は $\mathbf{R}$ 上の同値関係 $x\sim x'\Leftrightarrow x'=\pm x$ である．

実際 $\varphi:\mathbf{R}/\!\sim\,\to\mathbf{R}_{\geq 0}$, $\varphi([x])=x^2$, は微分同相写像である．というのは，$\varphi\circ\pi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_{\geq 0}$, $(\varphi\circ\pi)(x)=x^2$ は (1) から (連続な) C^∞ 写像なので，(3) から φ は C^∞ 写像．逆写像は $\psi:\mathbf{R}_{\geq 0}\to\mathbf{R}/\!\sim$, $\psi(y)=[\sqrt{y}]$ である．これが C^∞ であるかどうかであるが，(5) に基づいて，任意の C^∞ 写像 $\ell:\mathbf{R}/\!\sim\,\to Q$ に対して $\ell\circ\psi:\mathbf{R}_{\geq 0}\to Q$ が C^∞ かどうか確認する．(3) から $\ell\circ\pi:\mathbf{R}\to Q$ は C^∞ 級で，$(\ell\circ\pi)(x)=(\ell\circ\pi)(-x)$ なので，ある C^∞ 写像 $\rho:\mathbf{R}\to Q$ が存在して，$(\ell\circ\pi)(x)=\rho(x^2)$ と表される．このとき，$(\ell\circ\psi)(y)=\ell([\sqrt{y}])=(\ell\circ\pi)(\sqrt{y})=\rho(y)$．したがって，$\ell\circ\psi$ は C^∞ 級． □

---

[7] $S\subseteq N$ を $\{f:\{\mathrm{pt}\}\to N\mid f(\mathrm{pt})\in S\}\subseteq C^\infty(\{\mathrm{pt}\},N)$ と同一視する．

[8] 良いことはくり返せ．

[9] 別の種類の定義もある：「N における S の 開近傍 U と，C^∞ 写像 $\bar{k}:U\to Q$ が存在して，$\bar{k}|_S=k$」(たとえば，Milnor, Topology from differentiable viewpoint を見よ)．S 上の写像の ”extension” に注目したこの定義と比べると，われわれの定義は，集合 S の ”parametrization” に注目した定義と言える．いわば，**parametric-minded** な定義と言える．

例 4.17 $\mathbf{R}^2$ に同値関係 $(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow(x',y')=\pm(x,y)$ を入れる．このとき，$\mathbf{R}^2/\sim$ は $\mathbf{R}^2$ と同相だが微分同相ではない．

$s:\mathbf{R}^2/\sim\to\mathbf{R}^2$, $s([(x,y)])=(x^2-y^2,2xy)$ は同相写像である．しかし s は微分同相写像ではない．他にも微分同相写像は存在しない．

実際，仮に C^∞ 写像 $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2/\sim$ と C^∞ 写像 $\varphi:\mathbf{R}^2/\sim\to\mathbf{R}^2$ があって，$\psi\circ\varphi=\mathrm{id},\varphi\circ\psi=\mathrm{id}$ が成り立つとすると矛盾が導かれる．というのは，もしそうなら，$\varphi\circ\pi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は C^∞ 級で，変換 $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ で不変なので，C^∞ 写像 $\rho:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ が存在して，$(\varphi\circ\pi)(x,y)=\rho(x^2,xy,y^2)$ が成立．C^∞ 級写像 $\Phi:\mathbf{R}^2/\sim\to\mathbf{R}^3$ があって，$(\Phi\circ\pi)(x,y)=(x^2,xy,y^2)$ つまり，$\varphi\circ\pi=\rho\circ\Phi\circ\pi$ が成立．π は全射だから，$\varphi=\rho\circ\Phi$ が成立．したがって，$\mathrm{id}=\varphi\circ\psi=\rho\circ(\Phi\circ\psi):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$．ところが，$\Psi:=\Phi\circ\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ の像は $\{(x^2,xy,y^2)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2\}=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{R}^3\mid XZ-Y^2=0\}$ に含まれるので，$\mathrm{rank}_0\Psi\leq 1$ であり矛盾．□

例 4.18 複素共役による商空間の微分構造[10]$\mathrm{conj}:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$, $\mathrm{conj}(z)=\overline{z}$, を複素共役とする．商空間 $\mathbf{C}/\mathrm{conj}$ は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_{\geq 0}$ と微分同相．$\mathbf{C}^2/\mathrm{conj}$ は $\mathbf{R}^4$ と同相であり，$\mathbf{R}^4$ と微分同相でない．そこで，改めて $\mathbf{R}^4$ から誘導される微分構造を $\mathbf{C}^2/\mathrm{conj}$ に入れる．同じ発想で，$\mathbf{C}P^2/\mathrm{conj}$ に微分構造を入れると，S^4 と微分同相である (Kuiper, Massay, Arnold の定理)．

4.6 積空間

$X\subseteq C^\infty(N,M), Y\subseteq C^\infty(L,P)$ に対し，

$$X\times Y=\{F\in C^\infty(N\amalg L,M\amalg P)\mid F(N)\subseteq M,F(L)\subseteq P\}$$

とみなす[11]．そして，$X/\sim\ \times Y/\approx$ を $(X\times Y)/\equiv$ と同一視する．ただし，$(f,g)\equiv(f',g')\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}f\sim f'$，かつ，$g\approx g'$．こうして，写像商空間の直積は写像商空間とみなされる．

例 4.19 $C^\infty(N,M)\times N\to M$, $(f,x)\mapsto f(x)$ は C^∞ 写像である[12]．

演習問題 4.20 例 4.19 の主張を定義にしたがって確かめてみよ．

補題 4.21 $\Phi:C^\infty(N,M)\times C^\infty(M,L)\to C^\infty(N,L)$, $\Phi(f,g)=g\circ f$ は C^∞ 写像である．

証明: $h:\Lambda\to C^\infty(N,M)\times C^\infty(M,L)$ を C^∞ 写像とする．C^∞ $H:\Lambda\times(N\amalg M)\to M\amalg L$ が h と定義しているとする．$H(\Lambda\times N)\subseteq M, H(\Lambda\times M)\subseteq L$ が成り立つ．$F:=H|_{\Lambda\times N}, G:=H|_{\Lambda\times M}$ とおく．$f_\lambda(x)=F(\lambda,x), g_\lambda(f_\lambda(x))=g_\lambda(F(x,\lambda)=G(\lambda,F(\lambda,x))$ は C^∞ 級．□

[10]徳永・島田・石川・齋藤・福井著「代数曲線と特異点」特異点の数理 4，pp.324–329. を参照．
[11]$N\amalg L$ は N と L の disjoint union.
[12]$f_n\to f, x_n\to x$ のとき，$f_n(x_n)\to f(x)$, $(n\to\infty)$ ということ．