写像空間のトポロジーと幾何と特異点論

石川 剛郎 (北大・理)

２００４年１０月〜２００５年１月，No. 3

3 四色の紙で作った多様体．

3.1 多様体上の C^∞ 写像空間

N を n 次元 C^∞ 多様体，M を m 次元 C^∞ 多様体[1]

$f : N \to M$ が C^∞ **写像**とは，f が連続写像で，任意の local chart $(U, \varphi), (V, \psi)$ (局所座標系) に関して

$$\boldsymbol{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap f^{-1}\psi(V)) \to V$$

(局所表示) が C^∞ 写像であること．

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ \varphi\uparrow & & \uparrow\psi \\ \mathbf{R}^n \supseteq U & & V \subseteq \mathbf{R}^m \end{array}$$

さて，

$$C^\infty(N, M) := \{ f : N \to M \mid C^\infty\text{写像} \}$$

とおく．

例 3.1 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は 1 次元 C^∞ 多様体，$\mathbf{R}^2$ は 2 次元 C^∞ 多様体．$C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ は平面 C^∞ 閉曲線の全体の集合．

例 3.2 $N = \{\mathrm{pt}\}$ (１点からなる空間) 0 次元多様体．$C^\infty(\{\mathrm{pt}\}, M)$ は，$(f : \mathrm{pt} \to M) \mapsto f(\mathrm{pt}) \in M$ によって M と同一視される．

$\varphi : N \to N'$ が C^∞ **微分同相写像** (diffeomorphism) とは，φ が C^∞ 写像であって，全単射であって，逆写像 φ^{-1} も C^∞ 写像であること．

3.2 多様体上のジェット空間

$J^r(N, M)$ の導入：

$x_0 \in N$ について $f : N \to M$ と $g : N \to M$ が x_0 で同じ r-**ジェット** (jet) を定める (記号 $f \sim_{r,x_0} g$) とは，共通の局所座標系に関して，局所表示

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \boldsymbol{f}_m(x_1, \ldots, x_n)), \quad \boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \boldsymbol{g}_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

の x_0 での r 階までの偏微分係数がすべて等しい，i.e.

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\boldsymbol{f}_i}{\partial x^\alpha}(x_0) = \frac{\partial^{|\alpha|}\boldsymbol{g}_i}{\partial x^\alpha}(x_0), \quad 0 \le |\alpha| \le r, 1 \le i \le m.$$

ということ．

[1] **多様体**とは，球面のように，どの点の近傍でも座標がとれる空間．座標変換が C^∞ 級であることを要請．**次元**とは必要な座標の個数．ちなみに,「吝嗇 (りんしょく) な神が作った多様体」という某先生の有名な言葉がある．

f の x_0 での同値類を $j^r f(x_0)$ と書く[2].

$$J^r(N,M) := \{j^r f(x_0) \mid x_0 \in N, f \in C^\infty(N,M)\}$$

とおく ($N \times M$ 上の r-**ジェット空間**). これは $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ と同じように C^∞ 多様体である. しかも $\dim J^r(N,M) = \dim J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

$f \in C^r(N,M)$ に対して r-ジェット拡大 (jet extension)

$$j^r f : N \to J^r(N,M)$$

を $j^r f(x) = j^r f(x)$ で定義する. $j^r f$ は C^∞ 写像である.

3.3 C^∞ 位相と Whitney C^∞ 位相

$C^\infty(N,M)$ 上の C^∞-位相：$r \geq 0$ integer, $K \subseteq N$ compact, $U \subseteq J^r(N,M)$ open に対して

$$W(r,K,U) := \{f \in C^\infty(N,M) \mid j^r f(K) \subseteq U\}$$

とおく. 部分酒豪族

$$\{W(r,K,U) \mid\ r \geq 0 \text{ integer}, K \subseteq N \text{ compact}, U \subseteq J^r(N,M) \text{ open}\}$$

で生成される位相を $C^\infty(N,M)$ の C^∞-**位相**という.

$C^\infty(N,M)$ 上の Whitney C^∞-位相：$r \geq 0$ integer, $U \subseteq J^r(N,M)$ open に対して

$$W(r,U) := \{f \in C^\infty(N,M) \mid j^r f(N) \subseteq U\}$$

とおく. 部分集合族 $\{W(r,U)\}$ で生成される位相を $C^\infty(N,M)$ の Whitney C^∞-**位相**という.

$f \in C^\infty(N,M)$, $f \in W(r,U)$ ならば, 明らかに, 任意の $K \subseteq N$ compact について $f \in W(r,U) \subseteq W(r,K,U)$ が成り立つので, C^∞ 位相より Whitney C^∞ 位相の方が強い.

N がコンパクトなら，C^∞ 位相と Whitney C^∞ 位相は一致するが，N がコンパクトでなければ，C^∞ 位相より Whitney C^∞ 位相の方が本当に強い．

演習問題 3.3 $C^\infty(N,M)$ 上の C^∞ 位相を $\mathcal{O}_{C^\infty}$, Whitney C^∞ 位相を $\mathcal{O}_{WC^\infty}$ と書くとき, 次の問いに答えよ.
(1) N が compact ならば, $\mathcal{O}_{C^\infty} = \mathcal{O}_{WC^\infty}$ であることを示せ.
(2) ($N = \mathbf{R}, M = \mathbf{R}$ の場合) $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ について, $\mathcal{O}_{C^\infty} \subset \mathcal{O}_{WC^\infty}$, $\mathcal{O}_{C^\infty} \neq \mathcal{O}_{WC^\infty}$ を示せ.

注意 3.4 $0 \leq r \leq s \leq \infty$ に対して $C^s(N,M) := \{f : N \to M \mid C^s\text{写像}\}$ 上の C^r-位相や Whitney C^r-位相が同様に定義される.

命題 3.5 N, M, L を C^∞ 多様体とする. $0 \leq r \leq s$ とする. ($s = \infty$ でもよい). 写像の合成

$$\Phi : C^s(N,M) \times C^s(M,L) \to C^s(N,L),\ \Phi(f,g) = g \circ f,$$

は C^r 位相に関して連続写像である.

また,

$$C^s_{pr}(N,M) := \{f \in C^s(N,M) \mid f \text{ はプロパー写像}\}$$

とおく[3].

命題 3.6 N, M, L を C^∞ 多様体とする. $0 \leq r \leq s$ とする. ($s = \infty$ でもよい). 写像の合成

$$\Phi : C^s_{pr}(N,M) \times C^s(M,L) \to C^s(N,L),\ \Phi(f,g) = g \circ f,$$

は *Whitney* C^r 位相に関して連続写像である.

命題 3.5, 3.6 の証明は, 命題 2.10 の証明と同様にできる.

[2] ところで, ジェットはなぜジェットと呼ばれるのだろうか.
[3] コンパクト集合の逆像がコンパクトになるような写像のことを proper という. プロパー写像で写すと, ”遠くのものは遠くに写る”.

3.4 写像芽空間

ここで，germ [4] の話．

$x_0 \in N$ とする．$f, g \in C^\infty(N, m)$ が x_0 **で同じ芽 (germ) を定める** (記号 $f \sim_{x_0} g$) とは，$f(x) = g(x) (x \in U)$ となる x_0 の開近傍 $U \subseteq N$ が存在すること．同値類を f_{x_0} と書き，写像 f の点 x_0 における**芽**という．

演習問題 3.7 同じ芽 (germ) を定めるという関係 $\sim_{x_0}$ は同値関係であることを示せ．

写像の局所的情報はすべて芽に含まれている．

注意 3.8 (1) 写像芽の記号：$f_{x_0}, (f \in C^\infty(N, M), x_0 \in N)$, のことを $f : (N, x_0) \to (M, y_0)$ と表すことも多い．ここで，$y_0 = f(x_0)$ である．たとえば，微分同相写像芽 $\sigma : (\mathbf{R}, x_0) \to (\mathbf{R}, x_0')$ といった場合，これは，微分同相写像 $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(\in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}))$ の $x_0 \in \mathbf{R}$ における芽であり，$x_0' = \sigma(x_0)$ ということ．

(2) 写像芽の代表元の定義域：$x_0 \in \Omega, x_0 \in \Omega'$ (N における x_0 の開近傍たち) と $f \in C^\infty(\Omega, M)$ $g \in C^\infty(\Omega', M)$ に対しても，f と g が x_0 で同じ芽を定めるという関係は定義される．

(3) $x_0 \in N, x_0 \in \Omega \subseteq N$, 開近傍，$f \in C^\infty(\Omega, M)$ に対し，$F \in C^\infty(N, M)$ があって，f と F は x_0 で同じ芽を定める．

演習問題 3.9 C^∞ 写像芽 $f : (N, x_0) \to (M, y_0), g : (M, y_0) \to (L, z_0)$ に対し，合成 $g \circ f : (N, x_0) \to (L, z_0)$ が C^∞ 写像芽として定まることを示せ．(合成が C^∞ であることと，$f \sim_{x_0} f', g \sim_{y_0} g'$ ならば $g \circ f \sim_{x_0} g' \circ f'$ であること)．

さて，$C^\infty(N, M) \times N$ に C^∞**-位相**を入れて位相空間とする．さらに同値関係

$$(f, x_0) \sim (g, x_0') \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x_0 = x_0', f_{x_0} = g_{x_0}$$

を導入して商空間をとる．

商空間

$$\mathcal{G}(N, M) := (C^\infty(N, M) \times N)/\sim$$

を**写像芽空間** (space of map-germs) という．($C^\infty(N, M) \times N$ の C^∞ 位相からの商位相を入れる)．このとき，自然な連続写像たち

$$\mathcal{G}(N, M) \to J^r(N, M) \to N \times M$$

$f_{x_0} \mapsto j^r f(x_0) \mapsto (x_0, f(x_0))$ がある．

演習問題 3.10 写像 $\pi : \mathcal{G}(N, M) \to J^r(N, M)$, $\pi(f_{x_0}) = j^r f(x_0)$, が (1) well-defined であること (2) 連続写像であることを示せ．

定義 3.11 2 つの写像芽 $f : (N, x_0) \to (M, y_0)$ と $f' : (N', x_0') \to (M', y_0')$ が $\mathcal{A}$**-同値** (**左右同値**ともいう．記号 $f_{x_0} \sim_{\mathcal{A}} g_{x_0'}$) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 微分同相写像芽 $\sigma : (N, x_0) \to (N', x_0')$ と微分同相写像芽 $\tau : (M, y_0) \to (M', y_0')$ があって，$\tau \circ f = f' \circ \sigma : (N, x_0) \to (M', y_0')$.

また，

$$\Sigma_\infty := \{f_{x_0} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid \frac{d^r f}{dx^r}(x_0) = 0, r = 1, 2, 3, \ldots .\}$$

(すべての微分係数が消えてしまう関数芽の全体) とおく．このとき，次の分類定理が成り立つ：

定理 3.12 商空間 $(\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_\infty)/\sim_{\mathcal{A}}$ は自然数全体の空間 $\mathbf{N}$ と同相である．

ただし，$\mathbf{N}$ には (離散位相ではなく)

$$\mathcal{O}_{\mathbf{N}} = \{\{0, 1, \ldots, n\} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

[4] germ にはバイキンという意味もあるが，芽という意味もある．

という (自然な順序から定まる) 位相を入れる：

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \cdots\cdots$$

一般に，$(\Lambda, \leq)$ を半順序集合[5] とする．部分集合 $V \subseteq \Lambda$ が**飽和的** (saturated) とは，$v \in V, v' \in \Lambda, v' \leq v \Rightarrow v' \in V$ が成り立つことである．さて，$\mathcal{O}_\Lambda$ を Λ の飽和的部分集合の全体のなす集合族とするとき $\mathcal{O}_\Lambda$ は開集合系の条件をみたす．これが順序構造から定まる位相である．

演習問題 3.13 $\mathcal{O}_\Lambda$ が開集合系の条件をみたすことを示せ．

定理 3.12 **の証明**. $f : (\mathbf{R}, x_0) \to (\mathbf{R}, y_0)$, $f_{x_0} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_\infty$ に対して，

$$\mathrm{ord}_{x_0} f := \min\{r \in \mathbf{N} \mid \frac{d^r f}{dx^r}(x_0) \neq 0\}$$

とおき，f の x_0 における位数 (order) という．写像 $\varphi : \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_\infty \to \mathbf{N}$, $f_{x_0} \mapsto \mathrm{ord}_{x_0} f$ は全射であり連続写像である[6]．また，φ は開写像である[7]．φ は写像 $\bar{\varphi} : (\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_\infty)/\sim_{\mathcal{A}} \to \mathbf{N}$ を誘導する．$\bar{\varphi}$ は全単射[8]であり連続写像であり，開写像である．$\bar{\varphi}^{-1} : \mathbf{N} \to (\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_\infty)/\sim_{\mathcal{A}}$ も連続であるので，$\bar{\varphi}$ は同相写像. □

次に，$\mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) = (C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2)/\sim$ を $\mathbf{R}^2$ 上の実数値関数芽空間とする．

命題 3.14 芽 $f : (\mathbf{R}^2, x_0) \to (\mathbf{R}, y_0)$, $f_{x_0} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ について，次の条件は同値である：

(1) $f : (\mathbf{R}^2, x_0) \to (\mathbf{R}, y_0)$ の $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ の中での f_{x_0} の開近傍 V があって，$V/\sim_{\mathcal{A}}$ が有限集合となる．

(2) 芽 f_{x_0} の $\sim_{\mathcal{A}}$ 同値類 $[f_{x_0}] \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})/\sim_{\mathcal{A}}$ について，$[f_{x_0}]$ の $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})/\sim_{\mathcal{A}}$ における有限個の点からなる開近傍が存在する．

上の条件が成り立つとき，$f : (\mathbf{R}^2, x_0) \to (\mathbf{R}, y_0)$ が 0-modal (あるいは simple) であると言い，同値類 $[f_{x_0}]$ が 0-modal (あるいは simple) であるという[9]．そして，$\Sigma_{NS} \subset \mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ で simple でない芽の $\mathcal{A}$-同値類の全体の集合，したがって，$\mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_{NS}$ で simple な芽の $\mathcal{A}$-同値類の全体の集合を表す．このとき，次が成り立つ[10]：

定理 3.15 商空間 $(\mathcal{G}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \setminus \Sigma_{NS})/\sim_{\mathcal{A}}$ は “ADE-空間” (図 1) に同相である．

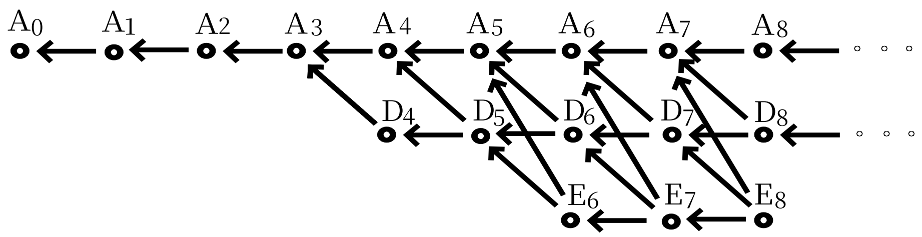

図 1: ADE-空間

[5] Λ の 2 要素の組の一部に関係 $v \leq v'$ が定まっていて，$v \leq v$ と $(v \leq v', v' \leq v \Rightarrow v = v')$ と $(v \leq v', v' \leq v'' \Rightarrow v \leq v'')$ が成り立つこと．

[6] $\pi : C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \to \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ を自然な射影とし，$(f, x_0) \in (C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}) \setminus \pi^{-1}(\Sigma_\infty)$ とし，$\mathrm{ord}_{x_0} f = n$ とする．このとき，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとり，$K = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $U = \{j^n g(x) \in J^n(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid |g^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| < \varepsilon\}$ とおけば，$(g, x) \in W(n, K, U) \times V \Rightarrow \mathrm{ord}_x g \leq n$ が成り立つ．

[7] 開集合の像が開集合であること．(f, x_0) の任意の開近傍 W と，$0 \leq \ell \leq \mathrm{ord}_{x_0} f$ に対して，$g(x) = f(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^\ell$ とおく．ただし，ε は，C^∞ 関数で，$\varepsilon(x_0) \neq 0$, x_0 の近傍の外では $\equiv 0$ であるようなものを選ぶ．このとき，$g \in W$ ととれ，しかも，$\mathrm{ord}_{x_0} g = \ell$ である．

[8] $\mathrm{ord}_{x_0} f = n$ ならば，f_{x_0} は x^n の 0 における芽と $\mathcal{A}$-同値.

[9] 一般に，位相空間 $(\mathcal{G}, \mathcal{O})$ においても，点 $g \in \mathcal{G}$ が 0-modal (あるいは simple) とは，有限個の点からなる g の開近傍 $U \in \mathcal{O}$ が存在すること，と定義できる．

[10] 証明については，V.I. Arnol'd, Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k, and Lagrange singularities, Funct. Anal. Appl., **6** (1972), 254–272. を見よ．