写像空間のトポロジーと幾何と特異点論

石川 剛郎 (北大・理)

２００４年１０月〜２００５年１月，No.2

2　「だって自然数も実数も抽象的なものじゃないか」— 写像空間のトポロジー

2.1　C^0 位相

$$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \ \ C^0\text{写像}\}$$

(連続写像の全体の集合) とおく．$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相 (C^0 topology) あるいは同じことだがコンパクト開位相 (compact open topology) の定義：生成する部分集合族を与えることで位相をきめる．

$K \subset \mathbf{R}^n$ をコンパクト集合，$U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 開集合について，

$$W(K, U) := \{f \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^0 f(K) \subseteq U\}$$

とおく．ただし，

$$j^0 f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \ j^0 f(x) = (x, f(x)),$$

は"グラフ写像"である．(参考：写像のグラフ)．$W(K, U)$ は，指定されたコンパクト集合 K 上でグラフが指定された開集合 U に入るような連続写像の全体．$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の部分集合族

$$\{W(K, U) \mid K \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, \ U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \text{ open}\}$$

で生成される $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を C^0 **位相**とよぶ．この位相構造 (開集合系) を $\mathcal{O}_{C^0}$ と書こう．

C^0 位相 $\mathcal{O}_{C^0}$ について，部分集合 $\Omega \subseteq C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $\forall f \in \Omega, \exists K_1, \dots, K_s$, ($\mathbf{R}^n$ の compact 集合)，$\exists U_1, \dots, U_s$, ($\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の開集合),

$$f \in W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2) \cap \cdots \cap W(K_s, U_s) \subseteq \Omega.$$

注意 2.1 $f \in W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2)$ ならば，$K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ があって，$f \in W(K, U) \subseteq W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2)$. 実際，たとえば $K = K_1 \cup K_2, U = (\pi_1^{-1}(K_1 \cap K_2) \cap U_1 \cap U_2) \cup (U_1 \setminus \pi^{-1}(K_1 \cap K_2)) \cup (U_2 \setminus \pi^{-1}(K_1 \cap K_2))$ とおけばよい．

例 2.2 (Weierstrass の近似定理) $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ に C^0 位相を入れる．このとき，多項式関数の全体 $\mathcal{P} \subset C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ は稠密 (dense)[1] である．

演習問題 2.3 (コンパクト開位相 $=$ C^0 位相) $L \subset \mathbf{R}^n$ compact, $V \subseteq \mathbf{R}^m$ open に対して，

$$W'(L, V) := \{f \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid f(L) \subseteq V\}$$

とおく．$\{W'(L, V) \mid L \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, V \subseteq \mathbf{R}^m \text{ open}\}$ で生成される $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相 $\mathcal{O}_{CO}$ を**コンパクト開位相** (compact open topology) とよぶ[2]．このとき，$\mathcal{O}_{CO} = \mathcal{O}_{C^0}$ を示せ．

演習問題 2.4 $X = C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ は C^0 位相に関してハウスドルフ空間[3]であることを示せ．

[1] つまり，任意の $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ の任意の開近傍が $\mathcal{P}$ と交わる

[2] 広義一様収束の位相とも言う．

[3] つまり，$f, g \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $f \neq g$，に対し，f の開近傍 W と g の開近傍 W' があって，$W \cap W' = \emptyset$.

演習問題 2.5 (1) $f \in C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ について，$T_f : C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $T_f(g) = f + g$ は C^0 位相について連続であることを示せ.

(2) $\alpha : C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $\alpha(f, g) = f + g$ は C^0 位相に関して連続であることを示せ[4].

演習問題 2.6 $\mu : C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \to C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $\mu(f, g) = f \cdot g$ は C^0 位相に関して連続であることを示せ.

演習問題 2.7 $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell)$ と $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^\ell)$ は同相であることを示せ.

なお, $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \subset C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $r > 0$, について，$C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相からの相対位相を $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相と呼ぶ.

2.2 C^1 位相

次に，$C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^1 位相 を定義しよう.

$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ C^1 写像, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対し，偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$, を考え，”1-ジェット拡大 (1-jet extension)”

$$j^1 f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} = \mathbf{R}^{n+m+nm}$$

$j^1 f(x) = (x, f(x), \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))$ (連続写像である) を考える．ここで，$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は，f の１階偏導関数 (nm 個) をすべて並べたものを意味する.

$K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq \mathbf{R}^{n+m+nm}$ open に対し，

$$W(K, U) := \{ f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^1 f(K) \subseteq U \}$$

とおく．部分集合族

$$\{ W(K, U) \mid K \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, U \subseteq \mathbf{R}^{n+nm} \text{ open} \}$$

で生成される $C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を C^1 **位相**という[5].

2.3 C^2 位相

次に，$C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^2 位相を次のように定義する.

$f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ に対し，

$$j^2 f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m}$$

$j^2 f(x) = (x, f(x), \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x))$ を考え，$K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m}$ open に対し，

$$W(K, U) := \{ f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^2 f(K) \subseteq U \}$$

とおくとき，部分集合族

$$\{ W(K, U) \mid K \subset \mathbf{R}^n \text{ compact}, U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m} \text{ open} \}$$

で生成される $C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を C^2 **位相**という.

---

[4] $C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ には直積位相を入れる．つまり，$W(K, U) \times W(K', U')$ という形の集合で生成される位相である.

[5] $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 上の C^1 位相は C^0 位相より強い．C^0 位相が，広義一様収束の位相なら，C^1 位相は，１階導関数までこめた広義一様収束の位相である.

2.4 ジェット空間

ジェット空間 (jet space) $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の定義.

$$J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}m} \times \cdots \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^M.$$

(これは，”テイラー多項式の全体の空間”を動機付けとしている)．ただし，$N = \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix} m$, $M = n + m + nm + \dfrac{n(n+1)}{2}m + \cdots + \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix} m = n + \begin{pmatrix} n+r \\ r \end{pmatrix} m$. そして，$j^r f : \mathbf{R}^n \to J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ を

$$j^r f(x) := (x, f(x), \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial_\ell}(x), \ldots, \frac{\partial^r f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(x))$$

で定める.

注意 2.8 $r \geq s$ について,

$$J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = \{j^r f(x_0) \mid x_0 \in \mathbf{R}^n, f \in C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\}$$

と表される[6].

$C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^r 位相 $(r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$,

$$W(K, U) := \{f \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^r f(K) \subseteq U\}$$

を使って，$\{W(K, U)\}$ で生成される位相として定義される.

$C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^r 位相 $(s = r, r+1, \ldots, \infty, \omega)$ は，$C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \subseteq C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ なので $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の C^r 位相からの相対位相.

2.5 C^∞ 位相

$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^∞ 位相.

$r \geq 0, K \subset \mathbf{R}^n$ compact, $U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ open に対し,

$$W(r, K, U) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^r f(K) \subseteq U\}$$

とおく．このとき $\{W(r, K, U)\}$ で生成される位相が C^∞ 位相.

注意 2.9 $X = C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ について，位相の列ができる：

$$\mathcal{O}^0_X \subseteq \mathcal{O}^1_X \subseteq \mathcal{O}^2_X \cdots \subseteq \cup_{r=0}^\infty \mathcal{O}^r_X = \mathcal{O}^\infty_X.$$

それぞれ $X = C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の C^0 位相，C^1 位相，C^2 位相,…，C^∞ 位相[7].

命題 2.10 $0 \geq r \geq s$ とする．($s = \infty$ でもよい)．写像の合成

$$\Phi : C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^s(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \to C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell),\ \Phi(f, g) = g \circ f,$$

は C^r 位相に関して連続写像である.

[6]実際，多項式写像全体の上だけで f を動かせば十分だ

[7]どんどん大きくなる．どんどん強くなる．どんどん細かくなる．どんどん文明化されていく.

Proof: $\Phi(f_0, g_0) = g_0 \circ f_0 = h_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$ とおく．$K \subset \mathbf{R}^n, U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell)$ について，$h_0 \in W(r, K, U)$ つまり $j^r h_0(K) \subseteq U$ とする．

$$J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times_{\mathbf{R}^m} J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) := \{(j^r f(x_0), j^r g(y_0)) \in J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \mid f(x_0) = y_0\}$$

とおき，$\varphi : J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times_{\mathbf{R}^m} J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \to J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell)$ を $\varphi(j^r f(x_0), j^r g(y_0)) = j^r(g^circf)(x_0)$ で定義する．φ は，(具体的に多項式で表される) 連続写像である．一般に $A \subset J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m), B \subset J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell)$ に対して，

$$A \times_{\mathbf{R}^m} B := \{j^r f(x_0), j^r g(y_0) \in A \times B \mid f(x_0) = y_0\} \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times_{\mathbf{R}^m} J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell)$$

とおく．仮定から，$\varphi((j^r f_0)(K) \times_{\mathbf{R}^m} (j^r g_0)(f_0(K))) \subseteq U$ が成立する．次の一般論 (命題 2.11) から「$(j^r f_0)(K)$ の開近傍 $V \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ と，$(j^r g_0)(f_0(K)))$ の開近傍 $V' \subseteq J^r(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell)$ があって，$V \times_{\mathbf{R}^m} V' \subseteq \varphi^{-1} U$ 」が成り立ち，$\Phi(W(K, V), W(f_0(K), V'))$
$subseteq W(K, U)$ となり，Φ が連続であることがわかる．□

命題 2.11 [8] A, B, P をハウスドルフ空間，P が局所コンパクトでパラコンパクトとする[9]．$\pi : A \to P, \pi' : B \to P$ を連続写像とし，$K \subseteq A, L \subseteq B$ を部分集合で，$\pi|_K : K \to P$, $\pi'|_L : L \to P$ がプロパー[10]とする．U' を $K \times_P L = \{(a, b) \in K \times L \mid \pi(a) = \pi(b)\}$ の $A \times_P B = \{(a, b) \in A \times B \mid \pi(a) = \pi'(b)\}$ の中での開近傍とする．このとき，$V \times_P V' \subseteq U'$ となるような A における K の開近傍 V と B における L の開近傍 V' が存在する．

注意 2.12 C^r 位相 $(r = 0, 1, 2, \dots, \infty)$ は，可算個の部分集合族で生成される．実際，有理点中心の有理半径の球を使って，

$$\{W(r, \overline{U_{1/k}(a)}, U_{1/\ell}(b)) \mid a \in \mathbf{Q}^n, b \in \mathbf{Q}^M, k = 1, 2, \dots, \ell = 1, 2, \dots\}$$

という可算個の生成系が作られる．ただし，$\mathbf{Q}^M \subset \mathbf{R}^M = J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

2.6 ホイットニー C^∞ 位相

$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の Whitney C^0 位相：$U \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ open に対して，

$$W(U) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^0 f(\mathbf{R}^n) \subseteq U\}$$

とおく．$\mathbf{R}^n$ 全体の上でグラフが 指定された開集合 U に含まれるような f の全体．$\{W(U)\}$ で生成される位相を $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の **Whitney C^0 位相**という．

$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の Whitney C^∞ 位相：$r \geq 0, U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ open に対して，

$$W(r, U) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid j^r f(\mathbf{R}^n) \subseteq U\}$$

とおく．ここで，$j^r f : \mathbf{R}^n \to J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ は f の r-ジェット拡大．そして，$\{W(r, U) \mid r \geq 0, U \subseteq J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\}$ で生成される $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の位相を **Whitney C^∞ 位相**という．

$C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 上の Whitney C^r 位相 $(s \geq r)$ なども同様に定義.

$$C^s_{pr}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) := \{f \in C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \mid f \text{ はプロパー写像 }\}$$

とおく．

命題 2.13 $0 \geq r \geq s$ とする．$(s = \infty$ でもよい)．写像の合成

$$\Phi : C^s_{pr}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \times C^s(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^\ell) \to C^s(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\ell),\ \Phi(f, g) = g \circ f,$$

は *Whitney* C^r 位相に関して連続写像である．

証明は，命題 2.10 の証明と同様にできる．

[8]証明は，J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings II: Infinitesimally stability implies stability,* Ann. of Math., **89** (1969), 254–291. の pp.261–262. または，M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities,* Graduate Texts in Math., **14**, Springer-Veerlag, 1973. を見よ．
[9]たとえば，A, B, P が多様体.
[10]コンパクト集合の逆像がコンパクトであるような写像のこと.