写像空間のトポロジーと幾何と特異点論

石川 剛郎 (北大・理)

0 「美しいものは皆，写像空間の特異点である」

この講義では，写像空間あるいはその商空間 (写像商空間) にトポロジー (位相構造) をどう入れるか，微分構造をどう入れるか，ということを説明する．

0.1 講義の目的は何か？

N を n 次元[1] C^∞ 多様体，M を m 次元 C^∞ 多様体とする．

$$C^\infty(N,M) := \{f : N \to M\ C^\infty\text{写像}\}$$

おく[2]．

X を $C^\infty(N,M)$ の部分集合 (写像空間, mapping space)，$\sim$ を X 上の同値関係とし，$X/\sim$ を商集合 (写像商空間, mapping space quotient) としたとき，$X/\sim$ にどのように位相構造，微分構造を入れるか，ということ．

0.2 いくつかの漠然とした例．動機付けとして．

例 0.1 (結び目空間[3], space of knots) $\mathrm{Enb}(S^1,\mathbf{R}^3) \subset C^\infty(S^1,\mathbf{R}^3)$ を円周 S^1 から $\mathbf{R}^3$ へのうめ込み (embedding) の全体の集合とする．$\mathrm{Enb}(S^1,\mathbf{R}^3)$ の連結成分を調べるのが結び目理論である．さらに，$\mathrm{Enb}(S^1,\mathbf{R}^3)$ 上にいろいろな幾何構造 (たとえばシンプレクティック構造や複素構造) が定まる (Brylinski).

例 0.2 $\mathrm{Diff}(N) := \{\varphi : N \to N\ C^\infty\text{微分同相写像}\}$ は，位相群，無限次元リー群の構造が入る．たとえば，$\mathrm{Diff}^+(S^2) \simeq SO(3)$ (3 次特殊直交群とホモトピー同値) などという定理[4]では，写像空間 $\mathrm{Diff}(N)$ の位相を定めておかなければいけない．

例 0.3 (リーマン構造のスーパー空間) N を C^∞ 多様体とする．$\mathcal{R}_N := \{N\text{ 上の Riemann 計量}\}$ とおくと，これは写像空間と考えられる．この空間に群 $\mathrm{Diff}(N)$ が自然に作用する．その軌道空間 (商空間) $\mathcal{S}_N := \mathcal{R}_N/\mathrm{Diff}(N)$ は，N 上のリーマン構造の同型類の全体の空間である．

例 0.4 (変分法) N, M を多様体とし，$\Phi : C^\infty(N,M) \to \mathbf{R}$ を写像空間上の関数とする：$\Phi = \Phi(f)$ で，変数 f が写像．$f \in C^\infty(N,M)$ が Φ **の臨界点** (critical point) とは，f の任意の 1-parameter 変形 f_t について $\dfrac{d}{dt}\Phi(f_t)|_{t=0} = 0$ となること．このアイディアをもとに，後で $C^\infty(N,M)$ に微分構造を入れる．

例 0.5 (写像の安定性, 特異点の分類問題) $C^\infty(N,M)$ に群 $\mathrm{Diff}(N)\times\mathrm{Diff}(M)$ が自然に作用する．$f \in C^\infty(N,M)$ が C^∞-**安定** (C^∞-stable) とは f の軌道が開集合であること．(つまり，f のある近傍内の任意の f' が $\mathrm{Diff}(N)\times\mathrm{Diff}(M)$-作用で f と移りあうこと．商空間 $\mathcal{M} := C^\infty(N,M)/\mathrm{Diff}(N)\times\mathrm{Diff}(M)$ の構造を調べることが，写像

[1] この世の中は無限次元だ．3 次元だとか 4 次元だとか言っているが，そんなはずはない．この複雑な世界を表すには無限のパラメータが必要だ．とはいえ，人間が理解できるのは，所詮有限次元だ．無限次元の中から，目的に応じて，有限個のパラメータに注目する．有限次元の情報に着目するのだ．しかも，それらのパラメータには制約が付く．というわけで，有限次元の多様体の研究をする．この段階で幾何が威力を発揮する．さて，有限次元の多様体の研究では，多様体の上の関数や多様体から多様体への写像を調べる．写像空間は無限次元だ．そこでまた，有限個のパラメータに注目する．このくり返しの中で研究が進んでいくわけである．

[2] この講義では，C^∞ のカテゴリーを扱うが，他の場合に同様に議論できる部分もある．

[3] S^1 から $\mathbf{R}^3$ へのうめ込み，あるいはその像を結び目 (knot) という．

[4] ちなみに Diff^+ は向きを保つ微分同相写像の全体を表す．

の微分トポロジーの目的である．点 $x_0 \in N$ について，点 x_0 での芽 (germ) を考えることにより，$C^\infty(N,M)$ に同値関係 $\sim_{x_0}$ が入る．商空間 $C^\infty(N,M)/\sim_{x_0}$ は，C^∞ 写像芽 (しゃぞうが) $f:(N,x_0)\to M$ の全体の空間である．この空間にトポロジーや微分構造を入れる．さらに，種々の同値関係による商空間の構造を調べるのが，写像の特異点論の目的となる．

1 「数学はすべて集合と写像の言葉で表される」

1.1 写像

X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係，商空間 $X/\sim$ は，X の $\sim$ に関する同値類の全体の集合．

X,Y を集合，$f:X\to Y$ を写像とする．つまり，X の各要素 x に対して，Y の要素 $f(x)$ を対応させる規則．このとき，$\Gamma(f):=\{(x,f(x))\in X\times Y \mid x\in X\}\subseteq X\times Y$ を f のグラフ (graph) という．$\pi_X:X\times Y\to X$ を $\pi_X(x,y)=x$ で定義するとき，$\pi_X|_{\Gamma(f)}:\Gamma(f)\to X$ は全単射．

例 1.1 たとえば，$m\times n$ 型行列とは写像 $\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbf{R}$ のこと，数列とは写像 $\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ のこと．

例 1.2 $X=\mathbf{R}^n, Y=\mathbf{R}^m$ をデカルト空間 (Cartesian space) とする．写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ は，n 変数関数の組 $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m),(f_i=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ のことである．

f が C^r **級写像**とは，各 $i,(i=1,2,\ldots,m)$ について，f_i が C^r 級関数 (r 階までの偏導関数がすべて存在し連続) ということ[5]．

C^0 級とは連続ということ．$C^1,C^2,\ldots,C^\infty$ および C^ω (実解析的)．以後，とくに C^∞ 級のものを主に扱う．

1.2 位相 (topology)

状況設定：X を集合，$\mathcal{O}$ を X 部分集合族とする．

条件[6]

(1) $\emptyset, X\in\mathcal{O}$

(2) $U,V\in\mathcal{O}$ ならば $U\cap V\in\mathcal{O}$

(3) $U_\lambda\in\mathcal{O}(\lambda\in\Lambda)$ ならば $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{O}$

をすべて満たすとき，$\mathcal{O}$ を X の開集合系あるいは X の位相 (位相構造) などという．位相が指定された集合 $X=(X,\mathcal{O})$ を位相空間[7]という．集合に与えうる位相はいろいろある．

$X=(X,\mathcal{O})$ を位相空間とするとき，$U\in\mathcal{O}$ を X の開集合という．このとき，$A\subseteq X$ が閉集合であるとは，その補集合 $X\setminus A$ が X の開集合であること．

≪部分集合族で生成される位相≫

状況設定：X を集合，$\mathcal{W}=\{W_\mu\}$ を X のある部分集合族とする．

$\mathcal{W}$ が生成する位相とは，$\mathcal{W}\subseteq\mathcal{O}$ となる「開集合系の条件」をみたすような最小の $\mathcal{O}$ のこと．

≪相対位相≫

状況設定：$X=(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間，$Y\subseteq X$ を部分集合とする．

このとき，Y に位相を次のように入れる：$U\subseteq Y$ が開集合ということを，X のある開集合 $V\subseteq X$ があって，$U=Y\cap V$ と表されること．つまり，

$$\mathcal{O}_Y:=\{Y\cap V \mid V\in\mathcal{O}_X\}$$

とする．この $\mathcal{O}_Y$ は Y 上の開集合系の条件をみたす．

≪商位相≫

状況設定：$X=(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係とする．

このとき，商集合 $X/\sim$ に位相を次のように入れる．

---

[5] f の定義域が $\mathbf{R}^n$ の領域 (開集合) の場合も定義は同様

[6] 開集合系の条件

[7] 位相という構造が入った途端に，集合は空間とよばれる．文明社会になったということか．

自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$ に関して，$U \subseteq X/\sim$ が開集合というのを逆像 $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ が X の開集合であること，と定める：

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid \ \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

は $X/\sim$ 上の開集合系の条件をみたす．

≪連続写像，同相写像≫

X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が**連続写像** (continuous) とは，Y の任意の開集合 U に対して，その逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合であること．

写像 $\varphi : X \to Y$ が**同相写像** (homeomorphism) とは，全単射で，連続で，逆写像 φ^{-1} も連続なこと．同相写像が１つでもあれば X と Y は**同相**である (homeomorphic) という．

例 1.3 (1) $\mathbf{R}$ 上の同値関係を $x \sim x' \Leftrightarrow x' = x$ または $x' = -x$ で定義する．$\mathbf{R}$ の位相から $\mathbf{R}/\sim$ に商位相を入れる．一方，半直線 $\mathbf{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ に $\mathbf{R}$ の位相からの相対位相を入れる．このとき，$\mathbf{R}/\sim$ と $\mathbf{R}_{\geq 0}$ は同相である．

(2) $\mathbf{R}$ 上の別の同値関係を $x \approx x' \Leftrightarrow (x = x' = 0$ または $xx' \neq 0)$ で定める．$\mathbf{R}/\approx$ は２つの同値類からなる集合である．$\mathbf{R}/\approx = \{[0], [1]\}$ の商位相は $\{\emptyset, \{[1]\}, \{[0], [1]\}\}$ である．この位相空間はダイヤグラム

$$\bullet \longleftarrow \bullet$$

で表される．

≪距離空間と位相≫

位相が「ものごとのつながり具合」を表す概念とすると，**距離**は「ものごとの遠近」を表す概念である[8]．

状況設定：X を集合，$d : X \times X \to \mathbf{R}$ を直積集合 $X \times X$ 上の関数とする．

$d : X \times X \to \mathbf{R}, (d = d(x, x'))$ が X 上の**距離** あるいは **距離関数** であるとは，条件 (距離の条件)

(1) $d(x, x') \geq 0, (x, x' \in X)$,

(2) $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x', (x, x' \in X)$,

(3) $d(x, x') = d(x', x), (x, x' \in X)$,

(4) $d(x, x') + d(x', x'') \geq d(x, x''), (x, x', x'' \in X)$.

をみたすこと．このとき，(X, d) を距離空間 (metric space) とよぶ．$x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して，

$$U_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}$$

を，点 x の ε-近傍とよぶ．

(X, d) が距離空間のとき，X に位相を次のように入れることができる[9]．

$$U \subseteq X \text{ が開集合} \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subseteq U$$

つまり，

$$\mathcal{O}_X := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(x) \subseteq U\}$$

とおくと，X の部分集合族 $\mathcal{O}_X$ は開集合系の条件をみたす．

演習問題 1.4 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．このとき，写像 $f : X \to Y$ が連続であるということが，「$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ such that $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$」ということで定義される．一方，上の構成により，位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が定まるので，$f : X \to Y$ が連続というのを「Y 開集合の逆像が X の開集合」ということで定義することができた．さて，この２つの定義が合致することを確かめて安心せよ．

---

[8] 距離が「遠近」なら，位相は「連断」か．また，距離を決めれば ε-近傍が定まり，位相を決めれば，近傍系がきまる，と理解すればよい．ただし，ある点の近傍とは，その点が属する，ある開集合を含むもののこと

[9] 遠近感がわかれば，つながり具合は自ずからわかる，というものだ．