幾何学３ (多様体入門) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ９ (２００１年１月１５日) の分

問． 積分曲線の「積分」とはどういう意味があるのですか？なぜ積分曲線と言うのですか？

答．「微分方程式を積分する」と言うのと同じ意味の「積分」です．いま，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ を考え，これを解くということはどういうことかをこの簡単で重要な例を使って，幾何的に説明してみましょう．そこで，xy-平面で，ベクトル場 $X(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} + f(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$ を考えます．(この場合，ベクトル場の x 成分が 1 で，y 成分が $f(x)$ ということです)．ここで，$f(x) = x$ の場合のベクトル場 X を図示してみてください．たとえば，点 $(0,0)$ でのベクトルは $(1,0)$ です．点 $(1,0)$ でのベクトルは $(1,1)$ です．点 $(1,1)$ でのベクトルは $(1,1)$ です．($f(x)$ はベクトルの勾配を表している)．さて，ベクトル場 X の積分曲線はどんなものになるでしょうか？思い出してみると，xy-平面上の曲線 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ が X の積分曲線である条件は，$\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t))$ でしたね．つまり，x 成分と y 成分を比較すれば，$\dfrac{dx(t)}{dt} = 1, \dfrac{dy(t)}{dt} = f(x(t))$ となることが条件です．初期値を $(x(0), y(0)) = (0, C)$ (y 軸上の任意の点) とおくと，積分曲線の条件から，$x(t) = t + a$, $y(t) = \int f(x(t))dt + b$, ($a, b$ は定数) となりますが，原始関数 $\int f(x(t))dt$ を $t = 0$ のとき 0 になるように選んでおけば，$a = 0, b = C$ になるので，$x(t) = t, y(t) = \int f(t)dt + C$，つまり，パラメータとして x をとれば，$y = \int f(x)dx + C$ (C は”積分定数”) となります．つまり，この場合，積分曲線は不定積分で表されるわけです．では，先程書いたベクトル場 $X(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ の積分曲線の図を図示してみてください．(平面を埋め尽くす放物線の族になるはずです.)

問． 積分曲線について，これは前期の微分方程式の授業 (解析学３) と何か関連するような気がします．

答． もちろん大いに関係します．解析学では $\mathbf{R}^n$ の上の話だったと思いますが，それを多様体の上で考えているわけです．そして，証明は，多様体の局所座標系を通して，$\mathbf{R}^n$ の場合に帰着させるわけです．

問． 積分曲線の「積分」と，微分積分でいう「積分」には何か関係があるのですか？

答． あります．そもそも微積分で習う積分には２種類ありますね．それは何かというと,「不定積分」と「定積分」です．この２つの積分は皆さん御存じのように，もちろん関係がありますが，もともとはまったく異なる概念です．不定積分の定義と定積分の定義を思い出せば，これらが全然違うものであることはわかりますね．**不定積分と定積分はもともと違うものである**，だけどそれが「微積分学の基本定理」により結びつくというつながりになるわけですね．ところで，良い定理とは，一見関係ないことがらを結び付ける定理です．「微積分学の基本定理」が良い定理なのは，不定積分と定積分が一見関係ないものだからです．それはともかく，微分方程式を積分するという場合の積分は不定積分から来ています．ベクトル場の積分曲線も不定積分から来ています．一方，関数を積分して面積を求める，とか，ルベーグ積分とかいう場合の積分は，定積分に由来しています．関係するけれど，もともと異なる概念から派生しているのです．

問． 積分曲線とは接ベクトル場であるということですか？

答． えーと，その曲線が通るすべての点における指定された接ベクトルを，どの瞬間にも定めている曲線が積分曲線ということです．(曲線そのものではなく曲線の同値類が接ベクトルでしたね)．

問． ベクトル場の積分曲線の具体例をもう一度教えてください．

答． $\mathbf{R}^3$ 上の流れ $\Phi_t(x_1, x_2, x_3) = (e^t x_1, x_2 + 2t, x_3 - t)$ を生成するようなベクトル場 X を求める部分ですね．ともかく，積分曲線の定義を思いだすと，条件は，$\mathbf{R}^3$ の各点 (x_1, x_2, x_3) を決めたときに，$\dfrac{d\Phi_t}{dt} = X(\Phi_t(x_1, x_2, x_3))$ が (考えている範囲の任意の t，この場合は任意の $t \in \mathbf{R}$ について) 成り立つことです．$X(x_1, x_2, x_3) = u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial}{\partial x_3}$ (ただし，u_1, u_2, u_3 は (x_1, x_2, x_3) の関数) とおいたとき，$X(\Phi_t(x_1, x_2, x_3)) = u_1(\Phi_t(x_1, x_2, x_3))\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2(\Phi_t(x_1, x_2, x_3))\frac{\partial}{\partial x_2} + u_3(\Phi_t(x_1, x_2, x_3))\frac{\partial}{\partial x_3}$ ですから，$e^t x_1 = u_1(e^t x_1, x_2 + 2t, x_3 - t), 2 = u_2(e^t x_1, x_2 + 2t, x_3 - t), -1 = u_3(e^t x_1, x_2 + 2t, x_3 - t)$ が関数 u_1, u_2, u_3 のみたすべき条件になりますね．したがって，明らかに (あるいは，とくに $t = 0$ とおいて見つければ) $u_1 = x_1, u_2 = 2, u_3 = -1$ と求められるわけです．とにかく「定義どおりに」ということですね．

問． 積分曲線の初期値を考える意義はどのようなものですか？初期値以外でも積分曲線はただ１つ存在することはいえないでしょうか？

答． とくに初期値を考えるということ自体は本質的なことではありません．とにかく,「ある決まった時刻にどこを通るかを指定する」と積分曲線が決まってしまうということが大事です．

問． 局所座標系をとりかえた時のベクトル場の変換公式のところで，何も考えずに式を変形していくと $X(f)(x) = \sum_{i=1}^n u'_i \dfrac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j} u_j) \dfrac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = n\sum_{j=1}^n u_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = nX(f)(x)$ と，おかしなことになってしまいました．

答． なるほど．ほとんど良いのですが，各 j について，$\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j} \dfrac{\partial f}{\partial x'_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ に注意すると，$\sum_{i=1}^n u'_i \dfrac{\partial f}{\partial x'_i} =$

$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}u_j)\frac{\partial f}{\partial x'_i}=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}$ となります．このように，局所座標の取り方によらないわけです．

問． ベクトル場の局所座標系をとりかえる時，各成分の微分可能性は言わなくてもよいのでしょうか？

答． この講義では，多様体や関数や写像やベクトル場や座標変換などは C^∞ 級を仮定しています．尋ねられたら，そう答えましょう．

問． ベクトル場のベクトルの１つが 0 という場合も考えるのでしょうか？

答． 考えます．そのような点を「ベクトル場の特異点」と言います．つまり「$x_0 \in N$ がベクトル場 X の特異点 $\Leftrightarrow X(x_0)=0$ (零ベクトル)」です．特異点でも積分曲線があります．特異点を通る積分曲線は，その点で,「ずっと，じっとしているもの」(定値写像) です．

問． ベクトル場のブラケットは局所座標系を変えても，同じ関数に作用させると同じ値になりますか？

答． なります．確かめてみてください．

問． 1-パラメータ変換群は，群 (Group) になるのですか？アーベル群になるようですが，そのことは何を意味しているのですか？

答． なります．簡単のために，ここでは多様体はコンパクトとしますが，$G=\{\Phi_t \mid t\in\mathbf{R}\}$ とおくと，G は可換群 (アーベル群) です．これは，**そもそも群という概念が生まれたときの歴史的雛形の１つ**と言えます．現代的なことばで言い換えると，アーベル群 $\mathbf{R}$ から，多様体 N 上の微分同相写像の作る群 $\mathrm{Diff}(N)$ への準同型写像，またはその像を，1-パラメータ変換群とよぶことができますね.「群」というものが考えられたこのような歴史的動機づけが，代数の講義で説明されるかどうかはわかりませんが.

問． 以前，代数学でも"交代積" という名で，可換性を表すものとして,「かっこ積」を習いました．その場合，$[X,Y]=0 \Leftrightarrow XY=YX$ なので，$[X,Y]=0$ ならば可換，という感じになって，何となくイメージ出来ました．ベクトル場 X,Y について $[X,Y]=0$ とはどのような事なのでしょうか？

答． なるほど良いところに気がつきましたね．さて，ベクトル場のとらえ方として，代数的なものと幾何的なものがあります．代数的なとらえ方は，ベクトル場を「１階の微分作用素」(あるいは「導分」) とみなすもので，そのとき，$[X,Y]=XY-YX$ となります．ここで，XY や YX は２階の微分作用素と考えられますが，その差は，実は１階の微分作用素となるわけです．したがって，$[X,Y]=0$ は，微分作用素として X,Y が可換，つまり，任意の可微分関数 h についても $X(Y(h))=Y(X(h))$ が成り立つことを意味します．幾何的なとらえ方は，ベクトル場を流れ (flow) の速度ベクトル場とみなす，つまり,「無限小変換」とみなすもので，その観点からすると，条件 $[X,Y]=0$ は X,Y が生成する流れが可換ということを意味します.

問． 2-パラメータ変換群もありますか？

答． 考えられます．たとえば，$[X,Y]=0$ のとき，それらの生成する流れ Φ_t と Ψ_t について，$\Phi_t\circ\Psi_s=\Psi_s\circ\Phi_t$ が成り立ち，アーベル群 $\mathbf{R}^2$ から多様体上の微分同相写像のな群への準同型写像が定まりますから,「2-パラメータ変換群」ができると言えます．でも，まずは 1-パラメータ変換群を十分に理解しましょう.

問． 多様体上のベクトル場全体の空間に，演算としてブラケットを考えたとき，何か代数的なものにできたりするのでしょうか？また，特徴的な公式などはあるのでしょうか？$[X,Y]=-[Y,X]$ は成り立ちますか？

答． リー代数 (リー環，Lie algebra) です．非常に重要な代数系で，特に幾何学や表現論などと関係して深く研究されています．交代性 $[X,Y]=-[Y,X]$ が成り立ちます．その他に重要な性質として，ヤコビ恒等式 $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ が成り立ちます.

問． 多様体上においてベクトル場や微分形式は具体的にどのような役割を果たすのですか？

答． ベクトル場や微分形式は多様体の性質を調べる基本的な道具です．そのことは，幾何学５の講義や，その他の講義で習うことでしょう．また，多様体の上で考えることにより，皆さんがすでに知っている (かも知れない) $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場や微分形式をより深く理解するのに役に立ちます．この講義では，そもそも多様体上でベクトル場や微分形式がどう定義されるか紹介し，基本的な定理の説明をするわけです．適当な比喩かどうかはわかりませんが，いわば，英語のアルファベット (ABC) や発音やあいさつの仕方 (How are you?) の授業をしているようなものとも言えます．皆さんが，将来，英語の文献を読んだり，英語で自分の意見をのべたりする (I think this is a pen.) ために役にたつように，お手伝いしているつもりです．ということは，この講義が役にたつかどうかは，皆さんの今後の努力にかかっているわけですね.

問． 定理が長すぎて覚えられません.

答． 意外かも知れませんが，**定理は覚えなくても良い**ものです．定理は，１つの具体例を思い浮かべながら読んでみて，納得できれば十分だと思います．(将来数学を研究しようと思う人は，さらに定理の証明を追跡して，論理的にも納得する必要がありますが)．ところで，**数学でまず覚えるべきなのは，定義 (用語の意味) です．次に具体例です**．定理は鑑賞するもの，定義をもとに具体例に使って味わうものです．ちなみに，演習問題は，いままでに習ったことを総動員して挑戦するもの，ヒントはその補助，この回答書は，皆さんへ贈るエールです．ところで，質問とはまったく関係なくて恐縮なのですが，皆さんは，どういう職業や立場につくにしろ，こと数学に関することについては，将来ずっと，周りの人から頼られる存在になると予想されます．その際に，やはり「受け売り」ではこまるので，自分で判断できて期待に答えられる数学の能力をつけておきましょう．皆さんは大丈夫だと思いますが，もし不安な人がいたら，いまからでも遅くありません,「これだけはわかる」ということを少しずつ増やしていけば自信がつくでしょう．ではまた.