

幾何学 3 (多様体入門) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 8 (2000年12月11日) の分

問. 微積 3 でも「ベクトル場」というものを学んだと思うのですが, この講義の定義とは違った気がします. 何かかわりはあるのですか?

答. あけましておめでとう. さて, 質問に対する回答ですが, 同じものです. いままで皆さんが知っているのは, \mathbb{R}^n の上のベクトル場だと思いますが, この講義では, より一般に多様体上のベクトル場を定義したわけです. 多様体が特に \mathbb{R}^n の場合に, 皆さんの知っているものと一致します (一致するはずです).

問. ベクトル場のところで, $X(x) = u_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + u_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ の x_1, x_2, \dots, x_n とは何ですか?

答. 局所座標です.

問. ベクトル場の表示は局所座標系によらないのですか?

答. よります. その際の変換公式を講義で紹介する予定です.

問. ベクトル場の概念は, 物理に出てくる“磁場”や“電場”の概念と同じようなものですか?

答. そうです. ベクトル場という概念は, 磁場や電場などを抽象化したものと考えればよいと思います.

問. 物理などでは重力などのベクトル場がでてきたわけですが, そういった力としてのベクトル場のイメージが強く, 多様体でベクトル場を考えるとというのがわかりません.

答. 多様体上のベクトル場の簡単な例としては, 平面内の円運動の速度ベクトル場を思い浮かべると良いと思います. ただし, 加速度ベクトル場は, 円には接していないので, 円上のベクトル場ではありません. (平面上の, 円に沿って定義されたベクトル場という言い方をします).

問. 今日の講義の最後に出てきたベクトル場についてですが, ベクトル解析で出てきた定理 (たとえば, ガウスの発散定理やストークスの定理) は成り立つのですか?

答. 成り立ちます. もちろん, 正確に定式化した後の話ですが.

問. 2次元多様体に3次元のベクトル場は考えないのですか?

答. 基本的には, 接ベクトル場だけを考えているので, 2次元多様体の場合のベクトル場なら, 2次元ベクトル場を扱います. ただし, たとえば, \mathbb{R}^3 内の S^2 に沿った法線ベクトル場といった対象も考える場合があります. その場合は, 法線ベクトルは接ベクトルではありませんから, いま講義でベクトル場とよんでいるものからははずれます. ベクトル場は詳しく「接ベクトル場」といった方が紛れがないかも知れませんね.

問. ファイブレーション (ファイバー束) の定義に出てきた「ファイバー」とはどのようなものなのですか?

答. 日常語でいうと, 繊維 (せんい) ですね. ファイブレーションは「繊維束」と訳されることもあります. 縄とか光ファイバーを思い浮かべるのもよいですし, 私 (石川) は, ホタテの貝柱などを連想しますね.

問. ファイブレーションの定義に出てきた π_2 とは何ですか?

答. 局所自明性を与える微分同相写像 $\pi^{-1}(U) \rightarrow N \times U$ に関連して現れる $\pi_2: N \times U \rightarrow U$ のことですね. 第2成分への射影です.

問. ファイブレーションの定義を覚えるだけでは忘れてしまいそうなので, 頭に焼きつくようなイメージが欲しいです.

答. 頭に焼き付いたら消えなくて困る, つまり理解をさらに深めていくときにそのイメージがじゃまになってしまうこともあるので注意しましょう! 記憶は ROM より RAM が良い! と思います. CD-ROM のように固定された記憶ではなく, いつでもクリアできる記憶の方が良い, ということでしょいか. それはともかく, そうですね, たとえば「よこしまな蛇が自分のシッポを噛んでいる図」をイメージしてください. 全体の形 (表面を見ている) としてはトーラスで, それに縞模様 (ファイバー) が描かれているわけです. あ, よこしまというのは, 蛇が直立したときに横縞である, という意味です. もちろん縦縞でも OK です. 今年は蛇年なので丁度よいたとえですね!?

問. ファイブレーションは多様体の理論でどのような役割をはたしますか?

答. 重要な役割をはたします. たとえば, 講義であつかった, 接束 (tangent bundle) は, 多様体を調べる上で, 避けて通ることのできないものと言えましょう. そのほかにも, 直積ではないが, ファイブレーションの構造を持つ多様体は多くあり, それをファイバーと底空間から調べるというのも多様体論における基本的な方法となっています. ところで, ファイブレーションの概念は, 純数学的に研究されていたのですが, しばらく前から, 物理学でもその有効性が独立に認識され, ファイブレーションの理論が応用されています.

問. 今日講義でやったファイブレーションと普通の束論 (上限, 下限, 分配束, プール代数など) との関係を教えてください.

答. たまたま用語が同じだけで, 関係ありません. 束論の束は lattice の訳ですが, ファイバー束の束は bundle の訳です. 残念でした. でもいろいろ知っている知識を関係づけようという姿勢はよいと思います.

問. 球面の接束 TS^2 は4次元と言いましたが, それはなぜですか? S^2 の接ベクトルは明らかに2次元だと思いませんか?

答. 接する点の自由度も2次元あるので, あわせて4次元ということです.

問．球の接束についてですが，接束とは， \mathbf{R}^3 という球の外から見た考え方でしょうか？また，球の各点の近傍の接平面だけ考えれば良いのでしょうか？

答．抽象的に見た考え方です．接平面を抽象にとらえ，それを集めてきています．また，接束は，球面上のすべての点の接平面を考えたものです．ところで，説明のためにいろいろ図示していますが，「図解のまま」と「図解ばなれ」という意識が大切で，図でわかったことは，論理的に再検討することが必要で，そうしないと，なかなか次元の高い話は理解しづらくなるかも知れません．

問． TS^2 が $S^2 \times \mathbf{R}^2$ と微分同相でないのはなぜですか？

答．証明するのはなかなか難しいです．でも，接束 TS^2 が自明でないことなら， S^2 上のベクトル場は必ず特異点をもつ，つまり，どこかで必ず零ベクトルになることからわかります．

問．一般に，自然数 n に対して「 TS^n は $S^n \times \mathbf{R}^n$ と微分同相でない」ことは成り立ちますか？

答．成り立ちません．たとえば， TS^1 は $S^1 \times \mathbf{R}^1$ と微分同相です．証明してみてください．

問．講義で， S^2 の tangent bundle が trivial でないとありましたが，何かの本で， S^1, S^3, S^7 の tangent bundle は trivial だと読みました．すごく不思議なことですね．

答．私(石川)も不思議だと思います．このことは，いわゆる「多元体」が $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ (ハミルトンの4元数体)， \mathbf{O} (ケーリーの8元体)に限るという事実と関係しています．

問．メビウスの帯をさらに半分ねじってつけたものは直積多様体になりますか？

答．なります． \mathbf{R}^3 の中への埋め込まれ方が，普通の円筒とは違うのは，実際試してみるとわかると思いますが，そのこととは別に，その多様体自体を独立に考えれば， $S^1 \times \mathbf{R}$ への全単射で，可微分で逆写像も可微分であるもの，つまり微分同相写像が存在します(いったん，切れ目をいれて，ねじれをとってまた元通りにつなげれば良いわけです)．

問． N と P は $N \times P$ の部分多様体になるのではないですか？

答．そうですね．そう考えることができます． N と $N \times \{p\} \subset N \times P$ が微分同相である，と言ってよいかも知れません．

問．トーラスは3次元空間内の2次元多様体というイメージがありますが，なぜ， $S^1 \times S^1 = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, y_1^2 + y_2^2 = 1\}$ と表されるのですか？

答．多様体の埋め込まれかたを度外視して，多様体を独立に考えているので，このようにいろいろな表し方をすることができる，ということです．

問．トーラスは \mathbf{R}^3 の極座標で書けますが，その上での微積分は，多様体として計算したものと同じ結果になるのですか？

答．そうですね．計算が正しければ同じ結果になりますね．もちろん計算のしやすさや，そもそも，どういう計算をするか，その理論を見通し良く組立てるには，いろいろな見方を知らなくてははいけませんね．ともかく，ものごとを1つのやり方でしか扱えないということほど愚かなことはありませんから．

問． \mathbf{R}^n から任意の領域 E_1, E_2 を取り出したとき， E_1, E_2 は微分同相でしょうか？

答．違います．もちろん「領域」の定義によりますが，連結な開集合としておくと，たとえば， \mathbf{R}^2 の円盤と円環(円盤の中心に穴をあけたもの)は微分同相ではありません．同相でもありません．ホモトピー同値でもありません(基本群が異なるから)．

問．位相空間と多様体の関係はどのようなものですか？

答．何度も言っているように，「アトラスの指定された位相空間が多様体」です．

問．前回のワークシートの2問目のヒントで「陰関数定理を使う」とありましたが，どのように使うのかわかりません．

答．「(1) 可微分写像 $f: \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $f(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1, v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$ で定義する．このとき， $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ が f の正則値であるための条件を求めよ．(2) $TS^2 = \{(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^6 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0\}$ が \mathbf{R}^6 の4次元部分多様体であることを示せ．(ヒント：(1)と陰関数定理を使う．)」という問題の(2)ですね．回答例を書いておきましょう(もちろんこれは1例であり，たとえば講義で説明した定理「正則値の逆像は空集合でなければ部分多様体である」を，その定理の主張を明記して利用しても良いですね．その定理の証明では陰関数定理を利用しているわけですが)．さて，(2)の回答例： $TS^2 = f^{-1}(0,0)$ である(1)から(0,0)は f の正則値，したがって， $\forall x_0 \in TS^2, x_0$ は f の正則値だから，陰関数定理から，局所微分同相 $\sigma: U(\subset \mathbf{R}^6) \rightarrow V(\subset \mathbf{R}^2)$ (ただし， U は x_0 の開近傍， V は 0 の開近傍)があって， $f \circ \sigma^{-1}(z_1, \dots, z_6) = (z_5, z_6)$ と表される．この σ を \mathbf{R}^6 の x_0 における局所座標とみなせば，

$$\sigma(U \cap TS^2) = \{(z_1, \dots, z_6) \in V \mid z_5 = 0, z_6 = 0\}$$

となるので， σ は， x_0 における TS^2 についての許容座標系をあたえる． x_0 は TS^2 の任意の点であったから， TS^2 は \mathbf{R}^6 の4次元多様体となる．なんてね．

問．前回の回答に関してですが，どうして $f^{-1}(y_0) = \emptyset$ のとき y_0 が正則値なのですか？正則点がないければ正則値もないという考え方は間違っていますか？

答．数学的に間違っているとか間違っていないとかいう以前の，形式論理上の規則からきている，と考えてください．つまり「前提が偽である命題自体は真である」という規則です．間違いやすいのでもう一度チェックしたらよいと思います．ではまた．