幾何学３ (多様体入門) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ７ (２０００年１２月４日) の分

問． 定理「$f : N \to P$ C^∞ map について，$y_0 \in P$ が f の正則値 $\Rightarrow f^{-1}(y_0)$ は N の submanifold で $\mathrm{codim} f^{-1}(y_0) = \dim P$」の仮定に「$f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$」が必要ではないですか？

答． 鋭いですね．必要です．空集合も部分多様体の定義は満たすことは満たしますが，多様体は「空集合ではない位相空間でアトラスの与えられたもの」という定義でしたから，部分多様体も空集合は除外して考えるのが自然でしょう．したがって，正しくは,「$f : N \to P$ C^∞ map について，$y_0 \in P$ が f の正則値かつ $f^{-1}(y_0) \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(y_0)$ は N の submanifold で $\mathrm{codim} f^{-1}(y_0) = \dim P$」です．指摘ありがとう．

問． $f^{-1}(y_0)$ が空になる場合，y_0 は正則値と考えるのですか？

答． やはり鋭い質問ですね．考えます．正則値であるという定義は,「$\forall x_0 \in f^{-1}(y_0)$, x_0 は f の正則値」なので，$f^{-1}(y_0) = \emptyset$ ならば論理的に条件は成り立ちますね．

問． $f : N \to P$ が可微分写像で，$y_0 \in P$ が f の正則値でないときは，$f^{-1}(y_0)$ はどのようになりますか？ $f^{-1}(y_0)$ は N の部分多様体にはならないのでしょうか？$y_0 \in P$ が f の正則値でないときは，$f^{-1}(y_0)$ は部分多様体の候補からはずれてしまうのかどうか疑問に思いました．

答． 部分多様体になる場合もありますが，一般には部分多様体にはなりません．$N = \mathbf{R}^2$，$P = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ と定めると，$y_0 = 0$ は正則値ではありません．そして，$f^{-1}(y_0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の部分多様体ではありません．

問． 「y_0 が f の正則値ではない $\Rightarrow f^{-1}(y_0)$ は N の部分多様体ではない」は成り立ちますか？

答． 成り立ちません．$N = \mathbf{R}^2$，$P = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が $f(x_1, x_2) = x_1^2$ と定めると，$y_0 = 0$ は f の正則値ではありません．でも，$f^{-1}(y_0)$ は，$\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ に等しいので，$\mathbf{R}^2$ の部分多様体です．このように，正則値でない値の逆像は，部分多様体になる場合もあり，ならない場合もあります．ヤコビ行列の階数という情報より，もっと精密な情報が必要になります．

問． 「$y_0 \in P$ が f の正則値」が成立しない時には，$f^{-1}(y_0)$ を $\mathrm{codim} f^{-1}(y_0) < \dim P$ の部分多様体とはできませんか？

答． できません．補足説明に，その証明を書いてくれましたが，その場合 $f^{-1}(y_0)$ を含む部分多様体があるということしか言えていません．でも，その発想は良いので，自信を持ってください．

問． $M = \{(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = 1, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{y} = 0\} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ が $2n+1$ 次元の部分多様体だということがわかりません．次元が高いためか，単位球面の単位接ベクトル全体の集合というのがよく分かりません．

答． 次元が低い場合，たとえば $n = 1, 2$ の場合に実感を得て，次元が高い場合は，論理的に納得してください．

問． $f(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}) = (\|\boldsymbol{x}\|, \|\mathbf{y}\|, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{y})$ のヤコビ行列が $\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2y_1 & 2y_2 & \cdots & 2y_{n+1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n+1} & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}$ となるのはなぜですか？

答． この場合，定義域の変数が，$x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1}$ ($2n+2$ 変数) であることに注意すれば分かると思います．

問． $\boldsymbol{x}, \mathbf{y}$ が１次独立ならば $\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2y_1 & 2y_2 & \cdots & 2y_{n+1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n+1} & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}$ の階数が 3 になるのはなぜですか？

答． 正確には，**$\boldsymbol{x}, \mathbf{y}$ が $\mathbf{R}^{n+1}$ において１次独立ならば**，という前提があります．**階数は，１次独立な行の個数に等しい**，ということを思い出すと，階数 3 ならば １行と２行と３行の３つのベクトルが **$\mathbf{R}^{2n+2}$ において１次独立**，ということが分かります．あとは，１次独立であることを示すために，１次結合をとり，その係数がすべて 0 になることを導くだけです．実行してください．

問． 許容座標系というのは何ですか？

答． 部分多様体の定義の条件をみたすような局所座標系のことです．

問． $S \subset N$ が部分多様体で，$x_0 \in S$ のとき，$T_{x_0}S \subset T_{x_0}N$ 部分ベクトル空間，の証明方法は？

答． 許容座標系を使って，$T_{x_0}N$ と $\mathbf{R}^n$ と同一視したとき，$T_{x_0}S$ は $\mathbf{R}^s = \{(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_{s+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$ と同一視され，これが部分ベクトル空間だからです．

問． 商ベクトル空間 $T_{x_0}N / T_{x_0}S$ には何か特別な性質があるのでしょうか？

答． あきらかに $\dim(T_{x_0}N / T_{x_0}S) = \mathrm{codim} S$ です．この商ベクトル空間 $T_{x_0}N / T_{x_0}S$ は，N における x_0 での S の法ベクトル空間の一般的な定義を与えます．ベクトル空間に計量が指定されていないときの，直交補空間の代用物です．

問． 余次元とは単に次元の差なのですか？

答． そうです．誰かが言っていましたが，日本人は引き算が得意だそうなので，誰にでもわかるやさしい概念かなと思います．

問． 余次元とはどういうものですか？sin(正弦)，cos(余弦) にたとえれば codim$S = n - s$ だったら，正次元 s といったところなのでしょうか？

答． 正次元という言い方はなく，単に次元と言います．次元と余次元です．

問． S が N の余次元 0 の部分多様体であるとき，S は N の開集合となっているのでしょうか？

答． そうです．n 次元多様体の n 次元部分多様体の定義 ($s = n$) を思い出すと，S の各点 x_0 に対し，N における x_0 のある開近傍 U から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U)$ への同相写像 $\psi : U \to \psi(U)$ があって，$\psi(S \cap U) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \psi(U) \mid$ 条件なし $\} = \psi(U)$ となりますね．このとき，$S \cap U = U$ が成り立ちます．つまり，$U \subset S$ です．したがって，S は N の開集合です．

問． 余次元とは，その集合の補集合に対応する次元でしょうか？

答． 違います．直感的には,「直交補空間の次元」と考えると良いと思います．

問． トーラス T^2 が $\mathbf{R}^3$ の部分多様体であることの証明はどのようにするのでしょうか？

答． 講義では紹介しませんでしたが,「埋め込み」という概念があります．問題は $T^2 \subset \mathbf{R}^3$ を定める式 (sin や cos を使ったよくある式) が埋め込みを定めるかどうかですが，次の定理を使えば証明されます：「N がコンパクトで，$f : N \to P$ が１対１はめこみ $\Rightarrow$ f は埋め込み」．

問． 直積多様体は何のために考えるのですか？

答． 知っている多様体から新しい多様体を構成する方法であると言えます．丁度，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ を構成したように．ちなみに，直積は，２つの多様体に限りません．多様体 $N_1, \dots, N_m$ に対し，直積多様体 $N_1 \times \cdots \times N_m$ が同様に定義されます．

問． 直積多様体のアトラスを作るときの $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ の意味が分かりません．

答． 説明し忘れました．$\varphi_\alpha \times \psi_\beta(x, y) = (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y))$ で定義される写像のことです．

問． 直積多様体について，トーラス以外の例を教えてください．メビウスの帯や n 次元射影空間とかはどうなるのですか？

答． すぐわかるのは，$\mathbf{R}^2$(平面)，$S^1 \times \mathbf{R}$(円柱) ですね．メビウスの帯は直積 $S^1 \times \mathbf{R}$ とは微分同相ではありません．射影空間も (自明でない) 直積としては表されません．(つまり，$M \cong M \times \mathrm{pt}$ (ただし，pt は１点からなる多様体) といった表し方は除いて)．$S^n \times S^m$ や $S^n \times \mathbf{R}P^m$ や $\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}P^m$ は想像できないかもしれないけれども，とにかく直積を使って構成される多様体です．

問． 接束と接ベクトル空間との違いは何ですか？

答． N の１点 x_0 を決めて，その点における接ベクトルを集めたものが接ベクトル空間 $T_{x_0}N$ です．その点を N 上で動かして，接ベクトルをすべて集めたものが接束 TN です．つまり，$TN = \cup_{x_0 \in N} T_{x_0}N$ です．

問． $\dim N < \dim P$ ならば $f : N \to P$ で可微分なものは存在しないですよね．

答． 「可微分なもの」ではなく,「正則点を持つもの」の書き間違いですよね．

問． M が部分多様体であることを示すための f を上手に取るコツはありますか？試行錯誤と色々な問題を解いてみた経験なのでしょうか？

答． そうですね．試行錯誤は必要でしょうね．多くの発明をしたことで有名なエジソンは，発明のコツは「１％のひらめきと９９％の汗」であると言っています．(inspiration と perspiration (汗) をかけているわけです)．いくら頭が良くても，ある程度の時間と労力をかけなければ，物事を身につけることはできませんよね．と言うより，**時間と労力をかけることができるということ自体が才能である**，ということなのでしょう．つまり,「コツコツ」がコツです．

問． $\mathbf{R}^4$ にうめこめない２次元多様体にはどんなものがあるのでしょうか？円周は１次元多様体で，$\mathbf{R}$ にはうめこめません．結び目をもつ閉曲線なら $\mathbf{R}^2$ にもうめこめませんよね．トーラスは２次元多様体ですが，$\mathbf{R}^2$ にうめこめません．クラインのつぼは，$\mathbf{R}^3$ にうめこめません．$\mathbf{R}^4$ にうめこめないものにはどんなものがあるのでしょう？

答． すばらしい質問ですね．こういう質問が出てきたことだけでも，私 (石川) はこの講義をした意義が十分あったと感じました．実は，すべての２次元多様体は $\mathbf{R}^4$ に埋め込むことができます．前の回答書でホイットニーの定理「すべての n 次元多様体は $\mathbf{R}^{2n+1}$ の部分多様体としてうめこまれる」を紹介しました．これは，Whitney が 1936 年に証明した定理ですが，その８年後，彼自身が，$\mathbf{R}^{2n+1}$ を $\mathbf{R}^{2n}$ としても成立することを証明しています：H.Whitney, The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, Ann. of Math., **45** (1944), 220–246. ですから，すべての 1 次元多様体は $\mathbf{R}^2$ に埋め込め，すべての 2 次元多様体は $\mathbf{R}^4$ に埋め込め，すべての 3 次元多様体は $\mathbf{R}^6$ に埋め込めます．えっ？結び目の問題はどうなるのか，ですか．結び目の問題は，多様体じたいの問題ではなく，その「埋め込み方」の問題です．

問． $f : X \to Y$ の逆像の定義は $f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ ではなかったでしょうか？もしこうなら $f^{-1}(y_0)$ ではなくて，$f^{-1}(\{y_0\})$ と思うのですが．

答． まったくその通りです．単に略記しただけであって，厳密には，$f^{-1}(\{y_0\})$ と書くべきです．

問． 今後，多様体の何について勉強し，どのような目的に向かって進んでいくのですか？

答． 基本的には，勉強するのは君ですね．進んでいくのも君次第ですね．それはともかく，講義では，このあとベクトル場や微分形式など，多様体を調べたり，多様体上で解析学を展開するときの基礎になる考え方を紹介していきます．それを参考に，自分で興味を持ったことを自主的にどんどん勉強していくことをお勧めします．ではまた．