幾何学３ (多様体入門) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 6 (２０００年１１月２７日) の分

問. 部分多様体はどのようなときに現れますか？具体例があれば教えてください.

答. $\mathbf{R}^2$ 内のなめらかな曲線，$\mathbf{R}^3$ 内のなめらかな曲線や曲面は，部分多様体の重要な例です．これらは，多様体の概念が生まれるまえから調べられてきたものであり，それらをより深く理解するために多様体論ができたきたという側面があります．ところで，この講義で，抽象的な多様体を定義しましたが，実は，すべての n 次元多様体は，$\mathbf{R}^{2n+1}$ の n 次元部分多様体として「埋め込む」ことができることが知られています (ホイットニーの定理).

問. 部分多様体を考えるときは，もとのアトラスとは別に許容座標系を取らなくてはならないのですか？

答. そうですね．たとえば，$\mathbf{R}^2$ (にただ１つのチャート $\mathrm{id} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ からなるアトラスを与えて２次元多様体とみなしたもの) の部分集合 $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$ を考えましょう．ここで S を図示してください．この場合，S は $\mathbf{R}^2$ の１次元部分多様体ですが，そのことを定義にしたがって確かめるためには，たとえば，局所座標系 $\psi : U = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，$\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - x_1^2)$ をとります．すると，$\psi(U) = \mathbf{R}^2$ であり，$\psi(S \cap U) = \psi(S) = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid y_2 = 0\}$ なり定義の条件をみたします．これが許容座標系です．ここで $\psi(S)$ を図示してください．この場合は S の各点で共通に許容座標系がとれます．局所座標近傍も $\mathbf{R}^2$ 全体でとることができます.

問. 多様体の部分集合は必ず部分多様体になるのですか？

答. なりません．たとえば，$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ を考えましょう．ここで X を図示してください．X は $\mathbf{R}^2$ の部分多様体ではありません．$X - \{(0,0)\}$ は１次元部分多様体ですが，X はそうではありません．$(0,0) \in X$ に対して部分多様体の条件をみたす局所座標系 (許容座標系) をとることが不可能だからです.

問. s 次元部分多様体は，$s+1$ 次元部分多様体ですか？定義の $\psi(U \cap S) = \{x \in \psi(U) \mid x_{s+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$ という所をみると，とくに s として，ギリギリの数字を定める必要はないので，そのようにとらえてよいのですか？

答. 違います．上の条件は等号なので，s を換えれば成立しませんね．では，許容近傍系を取り直したら，s が $s+1$ に変わったりするか，というと，やはり次元 s は定まります．理由は，以前から言っているように，多様体の次元は接ベクトル空間の次元として (局所座標系の取り方によらず) 定まってしまうからです.

問. N が n 次元多様体，S が N の部分多様体で，$\dim N = \dim P$ のとき，S は N の開集合しかありえないのではないでしょうか？

答. その通りです．このような部分多様体を**開部分多様体**と呼びます.

問. 微分写像 $f_* : T_{x_0}N \to T_{f(x_0)}P$ は well-defined ですか？可微分曲線の取り方によらないのですか？

答. よりません．証明できるので証明してみることを勧めます．(質問書の中で証明してくれた人もいます．very good!)

問. $f_* : T_{x_0}N \to T_{f(x_0)}P$ が全射であるということを示すには，どのような方法をとれば良いのでしょうか？

答. ヤコビ行列の階数を調べます.

問. $f_* : T_{x_0}N \to T_{f(x_0)}P$ が全射ということと，f の x_0 におけるヤコビ行列の階数が p ということが同値である，というのがわかりません.

答. 局所座標系をとることによって，$T_{x_0}N \cong \mathbf{R}^n, T_{f(x_0)}P \cong \mathbf{R}^p$ と数ベクトル空間と対応がつき，(その対応のもとで)，線形写像 f_* が n 次縦ベクトル $\mathbf{v}$ を p 次縦ベクトル $A\mathbf{v}$ に写す具体的な線形写像によって表されます．ここで，A は f (を局所座標で表したもの) のヤコビ行列です．つまり，$A = J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}(\varphi(x_0))$ です．ここで図式化してください．さて，A は p 行 n 列の行列ですね．そして，f_* が全射 $\Leftrightarrow$ 写像 $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全射，ということになります．では，写像 $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全射ということはどういうことでしょうか？それは，$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^p, \exists \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n ; A\mathbf{v} = \mathbf{u}$ が成り立つことです．ここで線形代数の教科書をひっぱり出してください．この条件は，A の列ベクトルたちの生成する $\mathbf{R}^p$ の部分ベクトル空間が $\mathbf{R}^p$ に一致する，ということで，その条件は，その部分ベクトル空間の次元，つまり，A の階数が p に等しい，ということですね．では，線形代数の教科書をしまってください.

問． $f: N \to P$ の x_0 におけるヤコビ行列の階数が，局所座標系の取り方によらないのはなぜですか？

答． 別の局所座標系をとると，

$$J_{\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}} = J_{\psi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi'^{-1}} = J_{\psi' \circ \psi^{-1}} J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} J_{\varphi \circ \varphi'^{-1}}$$

となります．ここで，x_0 の座標を書くのを省略しています．さて，大事なのは，$J_{\psi' \circ \psi^{-1}}$ や $J_{\varphi \circ \varphi'^{-1}}$ が正則行列であることです．**微分同相写像のヤコビ行列は正則行列である**．ここで線形代数の教科書をひっぱり出してきてください．同じ式は書いていないかもしれないけれど，P, Q が正則行列のとき，$\mathrm{rank} QAP = \mathrm{rank} A$ がなりたつ，ということがわかるはずです．したがって，$J_{\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}}(\varphi'(x_0)) = J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}(\varphi(x_0))$ が成り立ち，局所座標系の取り方によらないことが示されます．では，線形代数の教科書をしまってください．

問． $\dfrac{d(\psi \circ f \circ c)}{dt}(0) = J_{\psi \circ f \varphi^{-1}}(0) \dfrac{d(\varphi \circ c)}{dt}(0)$ となるのはわかるのですが，$\dfrac{d(\psi \circ f \circ c)}{dt}(0) = J_{\psi \circ f}(0) \dfrac{dc}{dt}(0)$ は成り立ちますか？なぜ，φ を考えているのかわかりません．

答． 成り立つとか成り立たないとかということではなく，式に意味があるか，ということです．f の定義域も多様体なので，やはりそこでも局所座標系をとってあげないと，ヤコビ行列の意味がはっきりしないからです．たとえば，$J_{\psi \circ f}(0)$ の意味がはっきりしないので，それを明確にするために φ を使ったわけです．

問． 微分写像 $f_*: T_{x_0} N \to T_{f(x_0)} P$ を “線形化” と名付けるのはなぜですか？

答． $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ の場合に説明すると分かりやすいと思います．つまり，$N = \mathbf{R}, P = \mathbf{R}$ の場合です．この場合，可微分写像は，もちろん普通の意味の可微分関数 $y = f(x)$ のことを指します．局所座標系としては $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ がとれますから，ヤコビ行列は微分係数 $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$ そのものになります．したがって，微分写像は，$v \mapsto \dfrac{dy}{dx}(x_0) v$ という $\mathbf{R}$(ベクトル空間) から $\mathbf{R}$(ベクトル空間) への線形写像により表現されます．さて，(x, y) 平面上に，点 $(x_0, f(x_0))$ を始点として，この線形写像のグラフを書いてください．すると，もとの関数 $y = f(x)$ のグラフの $(x_0, f(x_0))$ における接線になることがわかりましたね．このように，微分写像は，もとの写像を近似する線形写像，言い換えれば「１次近似」という意味あいがあります．一般の場合も同様の意味があるので,「線形化」と呼ぶのがふさわしいわけです．

問． $x_0 \in N$ が f の正則点とは，$f_*: T_{x_0} N \to T_{f(x_0)} P$ が全射，ということですが，正則だと何かよいことがあるんですか？

答． 陰関数定理を適用できます．f が線形写像でうまく近似できるということです.「何かよいこと」というより「安心」ということでしょうか．

問． 正則点の定義のところで，$\dim N \geqq \dim P$ としたのはなぜですか？$\dim N < \dim P$ でもうまく定義できると思うのですが，単に決め事としてこうしただけなのですか？

答． $\dim N \geqq \dim P$ とした，のではなく，$\dim N \geqq \dim P$ となる，ということです．f_* は n 次元ベクトル空間から p 次元ベクトル空間への線形写像ですから，それが全射であるためには当然 $n \geqq p$ でなければいけませんね．

問． 講義中の関数 $y = f(x)$ の場合の正則点，正則値の説明がのみこめません．

答． $x_0 \in \mathbf{R}$ が $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ の正則点である条件は，$\dfrac{dy}{dx}(x_0) \neq 0$ です．言い換えれば，接線が水平ではない点が正則点です．したがって，$y_0 \in \mathbf{R}$ が f の正則値である条件は，f の値が y_0 となるどんな x_0 も正則点である，すなわち，$\dfrac{dy}{dx}(x_0) \neq 0$ ということです．たとえば，関数 $y = x^3 - 3x$ の正則値の集合はどうなるでしょうか？

問． 第２回の講義のときにも正則点について定義していますが今回の講義と違いがあるのでしょうか？

答． ユークリッド空間での定義と一般の多様体での定義の違いです．もちろん，多様体での定義は，前の定義の一般化になっています．

問． 正則点は多様体のどのような点とイメージすればよいのですか？

答． 正則点という概念は，写像や関数に対して定めるものです．地形図にたとえると，山頂や峠や谷は正則点ではありません (正則点ではない点を**臨界点** (critical point) とよびます)．等高線がなめらかな層状になっている部分が正則点に該当します．この場合，写像としては,「高さ関数」を考えています．また，地表はいたるところ滑らかであると仮定しています．

問． x_0 が f の正則点である事と，$\mathrm{Im} f$ が $f(x_0)$ の近くで，P の中で p 次元部分多様体となり得る事

には関係がありますか？

答． $\mathrm{Im} f$ は x_0 の近くの f の挙動だけでは決まらないのですが，もし，$f : N \to P$ が N **のすべての点で**しずめこみであると仮定すると，陰関数定理により，f は開写像であり，とくに，$f(N)$ は P の開集合となり，P の開部分多様体，つまり p 次元部分多様体になります．

問． f が x_0 ではめこみ $\Leftrightarrow$ f_* が単射，f が x_0 でしずめこみ $\Leftrightarrow$ f_* が全射，という定義ですが，なぜ「はめこみ」「しずめこみ」と名付けられたのですか？

答．「はめこみ」の類似語に「埋め込み」という言葉があります．これは局所的な概念ではなく，写像そのものに対する用語で，$f : N \to P$ が**埋め込み**であるとは，f が N のすべての点ではめこみであり，１対１であり，しかも，像 $f(N) \subset P$ への同相写像になっているときに言います．このとき，像 $f(N)$ は P の n 次元部分多様体になります．この「埋め込み」という言葉との関連から，１対１とは限らないので,「はめこみ」という名前をつけたと想像されます．図形として 0 は円周 S^1 の埋め込みで，8 は円周 S^1 のはめこみです.「しずめこみ」は，射影 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$，$(x, y, z) \to (x, y)$ がそうなので，いかにも沈んでいるという感じから連想されたものと想像します．

問． x_0 が f の正則点 $\Leftrightarrow$ f が x_0 でしずめこみ，ということでよいですか？

答． はい，そうです．

問． f が x_0 ではめこみということをヤコビ行列で表すとどうなるのでしょうか？

答．「f_* が単射 $\Leftrightarrow$ 写像 $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が単射」が成り立ちます．ただし，$A = J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x_0))$ です．(φ, ψ は局所座標系)．

問． $\dim N = \dim P$ のとき，$f_* : T_{x_0}N \to T_{f(x_0)}P$ が単射であり全射であるのは，どういう感じのものか，数学的にどういう特徴があるのですか？

答． このとき，f_* は全単射線形写像なので，同型写像です．ヤコビ行列が (線形代数で言うところの) 正則行列の場合です．この場合，逆関数定理から，f は x_0 で局所微分同相になります．

問． f_* が全単射の時や，f_* が全射でも単射でもない時はありえると思うのですが，実際こういう場合はありえるのでしょうか？

答． もちろん，ありえます．たとえば，$N = \mathbf{R}^2, P = \mathbf{R}^2$ で，$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f(x_1, x_2) = (e^{x_1}, e^{x_2})$ で定めれば，$f_* : T_{x_0}\mathbf{R}^2 \to T_{f(x_0)}\mathbf{R}^2$ はどの点 $x_0 \in \mathbf{R}^2$ でも全単射です．また，$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $g(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ と定めると，f_* は全射でも単射でもありません．ここでヤコビ行列を求めてください．

問． 局所座標系の定義を，少し詳しく，日本語を交えて説明してください．

答．局所座標系とは，多様体の開集合から，その多様体の次元に等しい次元をもつユークリッド空間 (デカルト空間) の開集合への同相写像であって，その多様体にはアトラスが指定されていますが，それと併せて考えても，やはりアトラスの条件をみたすようなもののことです．たとえば，多様体として，$\mathbf{R}^n$ 自身を考える場合，アトラスとしては，$\mathrm{id} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ をとりますが，そうすると，$x_0 \in \mathbf{R}^n$ のまわりの局所座標系とは，$\mathbf{R}^n$ における x_0 の開近傍 U 上で定義された同相写像 $\psi : U \to \psi(U) \subset \mathbf{R}^n$ であって，U から $\psi(U)$ への微分同相写像であるものを指します．そのようなものなら，何であれ，局所座標系として採用されます．

問． 前々回の質問の回答に関してですが，N が１次元以上の多様体のとき，そのアトラスの同値類が無数にあることは，N のある１つのアトラスを，$\{(U_\lambda, \psi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ とし，$\psi_\lambda(p) = (x_1^\lambda(p), \dots, x_n^\lambda(p))$ と書く．このとき，$\varphi_\lambda^{(n)} : U_\lambda \to \mathbf{R}^n$ を $\varphi_\lambda^{(n)}(p) = ((x_1^\lambda(p))^{2n+1}, \dots, x_n^\lambda(p))$ と def すると，$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda^{(n)})\}_{\lambda\in\Lambda}$ は新しいアトラスで，それぞれ異なる同値類に含まれる．よって無限個ある．といった感じでよいのでしょうか？

答． だいたいよいと思います．ただし，実際に n が異なるときにそれぞれ同値でないようにするためには，ある λ と，ある $p \in U_\lambda$ について，$x_1^\lambda(p) = 0$ という条件をみたすように最初のアトラスをとっておく必要がありますね．(１つのチャートを平行移動するだけでよいので，もちろん多様体の構造を変えることなくそうできます)．というのは，$y = x^{2n+1}$ は，$x = 0$ を除くと，C^∞ 級の逆写像を持ってしまうからです．

問． 部分多様体の定義が出てきましたが，多様体を部分多様体で割ったりしますか？

答． それにぴったり該当する概念はありませんが，これから講義で説明する予定の「ファイブレーション」(fibration) あるいは，この講義では説明しませんが，ファイバー束 (fiber bundle) あるいは,「リー群の部分リー群による商リー群」などは質問の主旨にまあまあ近いかな，とは思います．ではまた．