幾何学３ (多様体入門) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ５ (２０００年１１月２０日) の分

問． 接ベクトルの定義ですが，曲線の同値類がベクトルであるということがよくわかりません．

答． 和とスカラー倍の定義されているものは，見かけによらず何でも「ベクトル」と呼ぶ，というのが現代数学のならわしですが，質問の趣旨はそういうことではないと思うので，正攻法で説明しましょう．さて，講義では,「多様体の接ベクトル」を，曲線の同値類として定義したわけですが，では，どうしてそういうふう定義するのか，何らかの実感を得る助けになるように，$\mathbf{R}^3$ 内の曲面の接ベクトルの定義を思い浮かべてみましょう．まず「接平面」ですが，その曲面にその点で接している平面という意味でしたね．たとえば，曲面が写像 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v), \mathbf{p} : U \to \mathbf{R}^3$ (U は $\mathbf{R}^2$ の開集合) で与えられ，$x_0 = \mathbf{p}(0, 0)$ とするとき，x_0 の接平面は，２つのベクトル $\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(0, 0)$ と $\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}(0, 0)$ の張る平面として定義されましたね．(ここで，この２つのベクトルは１次独立，つまり，$\mathbf{p}$ のヤコビ行列の階数が２であると仮定しています)．そして，x_0 を始点とする接平面内のベクトルを接ベクトルと呼んでいたわけです．その際，各接ベクトルは，その曲面の接する方向と，長さを指定するわけですが，よく考えてみると，その接ベクトルは，曲面上のある曲線の速度ベクトルになります．つまり，uv 平面上の曲線 $\ell = \ell(t), \ell : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^2, \ell(0) = (0, 0)$ を選び，曲面上にのっている曲線 $\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(\ell(t)), \mathbf{q} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^3$ を考えたとき，速度ベクトル $\dfrac{d\mathbf{q}}{dt}(0)$ として接ベクトルが得られます．ここでのキーワードは**方向微分**です．さてこの場合，この接ベクトル (速度ベクトル) は３次元ベクトルです．しかし，多様体という場合，抽象的に考えているので，空間曲面の場合の $\mathbf{R}^3$ のように，何か「入れ物」に入っているとは仮定していません．ですから，上のような接ベクトルの定義そのままでは通用しなくなるわけです．そこで，講義で説明した，局所座標系あるいはチャートを用いた定義が定着してきたわけです．そう定義することによって，**多様体が「入れ物」に入っていると仮定しなくても，あるいは，入っているとしても，その入り方によらずに定まる**接ベクトルの定義が得られたわけです．この部分は「分かりやすさ」を少しだけ犠牲にしているので，多様体を学ぶ上で，多くの人がなかなか理解するのが困難なところのようなのです．でも，一度このような考えかた (発想) を身につけてしまえば，あとは同様な発想でのアプローチのくり返しが多いので，数学の理解は断然容易になります．もちろん**考え方を身につけるということが一番難しい**，ということはじゅうじゅう承知していますが，この講義の目的は，(細かい知識を教えることではなく)，皆さんが様々な考え方を身に付ける手助けすることなので，仕方ないですよね．

問． 接ベクトルを考えるとき，元の曲線の形は重要ではないのですか？外見上同じように見える曲線でも，定義域が $\dfrac{1}{2}$ になれば，速度は倍になり，ベクトルとしては異なります．

答． その通りです．ここでは，曲線は写像として扱っているわけです．つまり，パラメーターの付け方によります．たとえば，曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ について，$\gamma(t) = c(2t)$ とおけば，曲線 $\gamma : (-\dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}) \to N$ が決まります．これらは見た目 (像) はまったく同じですが，γ が決めるベクトルは，c の決めるベクトルの 2 倍ですね．

問． 曲線の同値類としての接ベクトルを，曲線の束を考えて x_0 で「縛れる」ものが同値，という感じでイメージすることにしました．より正確にするために留意する点を教えてください．

答． なるほどね．前の質問にあるように，パラメーター付けが問題であるということを意識しておけば，より良いと思います．

問． 接ベクトルの定義が局所座標系のとり方によらない，というのは，x_0 のまわりの局所座標系 $\psi : V \to \mathbf{R}^n$ と別の局所座標系 $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ をとったとき，$\dfrac{d\psi \circ c_1}{dt}(0) = \dfrac{d\psi \circ c_2}{dt}(0)$ ならば $\dfrac{d\varphi \circ c_1}{dt}(0) = \dfrac{d\varphi \circ c_2}{dt}(0)$ をみたすことですか？

答． その通りです．よくわかりましたね．では，このことを実際に示してみてください．

問． $\psi : T_{x_0}N \to \mathbf{R}^n$ は全単射になるのでしょうか？

答． 講義で説明した $\psi : V \to \mathbf{R}^n$ は局所座標系であって，あくまで，多様体 N の開集合 V から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(V)$ への同相写像です．$\psi : T_{x_0}N \to \mathbf{R}^n$ **ではありません**．あくまで ψ が誘導する接ベクトルの対応なので，名前が必要なら $\psi_* : T_{x_0}N \to \mathbf{R}^n$ とでも書きましょうか．ともかく，この対

応は，**接ベクトルの数ベクトルによる表示**とよぶべきものであり，

$$[c] \mapsto (\frac{\partial \psi_1 \circ c}{\partial t}(0), \ldots, \frac{\partial \psi_n \circ c}{\partial t}(0))$$

で定めました．ここで，$[c]$ は曲線 c の定める接ベクトル (c の同値類) $\psi_1, \ldots, \psi_n$ は ψ の成分です．この対応が全単射であるかどうか，というのが質問の主旨ですね．ずばり全単射です．まず接ベクトルの定義から，(well-defined であることと) 単射であることは明らかですね．問題は全射かどうかです．いま，任意に $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ をとりましょう．これに対し，$\psi(V)$ の中で，$\psi(x_0)$ を通り，速度ベクトルが $\mathbf{v}$ であるような曲線 (直線) $\ell(t) = \psi(x_0) + t\mathbf{v}, \ell : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \psi(V)$ が関係しそうだと予想できるので，それを ψ で引き戻して，V 上の曲線 $c = \psi^{-1} \circ \ell$ を考えてあげれば，$[c]$ が $\mathbf{v}$ に対応します．したがって，全射でもあります．全単射なので，それによって，数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ から $T_{x_0}N$ のベクトル空間の構造を誘導できます．つまり，$[c_1] \mapsto \mathbf{v}_1, [c_2] \mapsto \mathbf{v}_2$ と対応するとき，$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ に対応する同値類を $[c_1] + [c_2]$ と定め，スカラー倍 $a\mathbf{v}_1$ に対応する同値類を $a[c_1]$ と定めるわけです．ここで，$[c_1] + [c_2] = [c_1 + c_2]$ とか，$a[c_1] = [ac_1]$ とは書けないことに注意しましょう．c_1 や c_2 は多様体上の曲線なので，それを足したりスカラー倍するという意味が不明だからです．

問． 接ベクトルの和とかは well-defined なのでしょうか？

答． 重要な質問ですね．接ベクトル空間のベクトル空間の構造は，局所座標系を使って定義したわけですが，それが局所座標系のとり方によらないのか，ということですね．よりません．局所座標系を取り替えたときベクトルの足し算やスカラー倍した結果が変わってしまったらこまるわけですが，大丈夫です．接ベクトルの数ベクトルによる表示を，座標を取り替えたときにどう変わるか，という変換公式を紹介しましたが，その公式を良く見ると，行列を掛けるだけの変換なので，足し算やスカラー倍が，どの座標系で決めても同じ結果を導くということがわかるわけです．

問． 接ベクトル空間での基底のとり方がよくわかりません．

答． ベクトル空間の基底のとり方はたくさんある，ということは１年生のときに習っていると思います．ここで説明したいのは，**局所座標系を１つ選ぶと接ベクトル空間の基底が標準的に１つ決まるよ**，ということです．それは対応 $T_{x_0}N \cong \mathbf{R}^n$ によって数ベクトル空間の標準基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ に対応するものですが，より明確に言うと，座標系 $\psi : V \to \mathbf{R}^n$ に関し，$\psi(V)$ 内の曲線 $\ell_i(t) = \psi(x_0) + t\mathbf{e}_i$ について，V 内の曲線 $c_i = \psi^{-1} \circ \ell_i$ を考え，その同値類を $[c_i] = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_0)$ と書きます．このとき，$\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x_0), \dfrac{\partial}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x_0)$ が標準的に決まる $T_{x_0}N$ の基底です．くどいようですが，この基底は，局所座標系を１つ指定すれば決まるものです．局所座標系をかえると基底が変わります．

問． 接ベクトル空間 $T_{x_0}N$ の次元は？

答． ベクトル空間の次元は，基底の個数のことなので，多様体 N の次元が n ならば，$T_{x_0}N$ のベクトル空間としての次元は n です．つまり，$\dim T_{x_0}N = \dim N$ です．

問． 接ベクトル空間を定義した目的は何ですか？

答． 多様体は難しいので，それを線形代数や微積分を応用して何とか理解するときの便利な道具の１つに，接ベクトル空間がなります．

問． $c_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to N, c_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to N, c_1(0) = x_0 = c_2(0)$ が x_0 における同じ接ベクトルを定める，という定義がありましたが，ε-近傍ではなく，もっと一般の開区間の場合はどうなるのですか？

答． 曲線上の１点が指定されていれば，曲線の定義域は問題になりません．たとえば，曲線 $c : (a, b) \to N$ があって，t_0 が開区間 (a, b) の内点のとき，曲線 c は $c(x_0) \in N$ における接ベクトルを定めます．というのは，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば，区間 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ が (a, b) に含まれるので，c をそこに制限して考え，t_0 における速度ベクトルに注目すればよいからです．その際，0 ではなく，t_0 で考えていますが，本質は変わりません．

問． 接ベクトルは C^∞ 級多様体でしか定義できないのですか？

答． C^1 級であれば OK です．

問． 接ベクトル空間 $T_{x_0}N$ は N の部分集合ですか？

答． 良い質問ですが，違います．そのことは，講義の例でやった $\mathbf{R}^3$ 内の円筒とその接平面を考え

ればわかりませね．では，$T_{x_0}N$ はどこにあるのか？**抽象的な存在なので，どこにあるかは問題にしない**というのが答です．どこかにないと落ち着かないとは思いますが，抽象的な概念というのは，多かれ少なかれそんなものであり，たとえば,「しあわせ」はどこにあるか，と聞かれても誰もが納得する答えはないでしょう．(とくにいわゆる先進国においてはそうでしょう．この国が先進国かどうかは別として)．それはともかく，抽象的だとわかりずらいので，便宜上，講義では $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の接平面などで具体化して説明している次第です．

問． 接ベクトルの変換公式の証明に出てきた $J_{\psi'\circ c}(0) = J\psi' \circ \psi^{-1}(\psi(x_0))J_{\psi\circ c}(0)$ が成り立つことがわかりません．合成写像のヤコビ行列は，$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$ じゃなかったですか？

答． 合成写像のヤコビ行列の公式で，$g = \psi' \circ \psi^{-1}, f = \psi \circ c, x = 0$ とあてはめています．なお，公式 $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$ の証明についてですが，１年生のときに習った (はずの)，**合成関数の偏微分の公式**と，**行列の積の定義**を思い出せば必ずできます．やってみてください．

問． 接ベクトルを微分作用素で定義することはできますか？

答． できます．講義で説明した接ベクトル $[c] \in T_{x_0}N$ を考えます．ここで，$[c]$ は曲線 c の定める接ベクトル (c の同値類) です．曲線と微分作用素は全然結びつかないと思うかもしれませんが，次のように考えることができます．すなわち，N 上の可微分関数 $f : N \to \mathbf{R}$ に対し，合成 $f(c(t))$ をとります．これは，$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}$ ですが，これの微分をとります．このとき，微分係数 $\dfrac{df(c(t))}{dt}(0)$ は c の同値類で決まることが証明できます．$X = [c]$ と書いたとき，$X(f) := \dfrac{df(c(t))}{dt}(0)$ と書きます．すると，$X(fg) = (Xf)g(x_0) + f(x_0)(Xg)$ が成り立ちます．(積の微分則ですね)．関数に対しスカラーを対応させるもの (汎関数) で，この微分則を満たすものを微分作用素とか導分 (derivation) などとよびます．このように接ベクトルは微分作用素ととらえられます．この際，関数は，点 x_0 の近傍で定義されていれば十分であることに注意しましょう．逆に，微分作用素 X が与えられたなら，それは，N 上のある曲線に沿っての x_0 での方向微分になることがわかり，講義で説明した接ベクトルが定まります．(このことは，局所座標系 $\psi : V \to \mathbf{R}^n$ の成分関数 $\psi_i : V \to \mathbf{R}$ に対して，数 $X(\psi_i)$ をとり，ベクトル $(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_n))$ をとり，それに対応する接ベクトルを考えればわかります)．

問． 多様体の本には，接ベクトルの定義を「$\forall f, g \in C^\infty(M)$ に対して，$X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg)$ を満たす線形写像 $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ を $p \in M$ における接ベクトルという」とあり，また他の本では，x における接ベクトルを「写像 $v : C^\infty(X.x, \mathbf{R}^1) \to \mathbf{R}^1$ で，φ を $x \in U = (\mathrm{domain}\varphi)$ である座標系としたとき，次のような性質をもつ n 個の実数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が存在するものをいう．すなわち，$f \in C^\infty(X.x, \mathbf{R}^1)$ に対して，$v(f) = \sum_{i=1}^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(x)}$」とありました．これらが，今日の講義分をふくめて同じものを言っていることがすぐにわかりません．

答． 同じものです．すぐにはわからないかもしれませんが，よく考えるとわかります．時間があれば講義で説明しますが，自分で考えてみることを薦めます．直前の質問に対する回答を参考にしてください．

問． 多様体の接ベクトルを定義しましたが，$\mathbf{R}^n$ のときのように法ベクトルは考えないのですか？

答． 考えられないので考えません．あとで，部分多様体という概念を導入しますが，部分多様体については法ベクトルが定義されます．(講義で詳しく説明するかどうかば別として．)

問． 講義の最後のところで，$f_* : T_{x_0}N \to T_{f(x_0)}P$ が自然に定義されるとありましたが，どのように自然なのかよくわかりません．“自然” ということばは，双線形写像やテンソルのところで沢山出てきましたが，一見して自然に思えない写像まで “自然” という説明がなされ，数学における “自然” の意味がはっきりしません．

答． そのうち自然にわかるようになります，というのは冗談ですが，はっきりした数学的意味は確定できないと思います．でも用語にはそれなりに意味はあって，たとえば微分写像 $f_* : T_{x_0}N \to T_{f(x_0)}P$ の場合は，その定義が局所座標系のとり方によらず，さらに，写像の合成に関する “naturality” $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*, (\mathrm{id}_N)_* = \mathrm{id}_{T_{x_0}N}$ が成り立つような定義であるという意味で思わず使ってしまいました．ところで，“自然” の類似語に “canonical” という言葉もありますね．

問． 多様体は結局ユークリッド空間に置き換えて考えなければ分かりにくいですか？

答． ユークリッド空間に置き換えれば分かりやすいですね．ではまた．