幾何学３(多様体入門)質問の回答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. ４ (２０００年１０月３０日) の分

問. 講義で，$\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \psi(x) = x^3$ としたとき，$\mathbf{R}$ 上のアトラス $\mathcal{U}'' = \{(\mathbf{R}, \psi)\}$ と $\mathcal{U}' = \{(\mathbf{R}, \mathrm{id}_{\mathbf{R}})\}$ は異なる多様体の構造をきめる，とありましたが，なぜ異なるか説明をお願いします.

答. $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \psi(x) = x^3$ が，$\mathcal{U}'$ に関する局所座標系でないからです．実際，ψ は同相写像ではあるものの，$\psi \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{R}})^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を調べると，$\psi \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{R}})^{-1}(x) = x^3$ なので，逆写像が 0 で微分可能でないから，局所座標系の条件をみたしません.

問. 「C^r 局所座標系は C^r アトラスと矛盾しないような新しい地図」とありましたが,「矛盾しない」とはどういうことですか？

答. 昔，中国で，矛(ほこ)と盾(たて)を売る者が居て，この矛はどんな盾をも突き通す，この盾はどんな矛でも通さない，と売り込んだところ，じゃあ，その矛でその盾を突いたらどうなるんだい，と聞かれ困ってしまったそうです．この故事は有名なので多分知っていると思いますが，この故事と同じように，もし，ある関数を，与えられた C^r アトラスで見たら，C^r 級なのに，あるページの地図で見たときだけ，C^r 級でなくなったとしたら，**この関数は，C^r 級なのか C^r 級でないのか，どっちなんだ**，と聞かれて困ってしまいますね．そんなことは起こらないということを保証する条件が，C^r 局所座標系の定義に組み込まれているわけです.

問. ★局所座標系とは「ある点のまわりで考えやすいように見方をかえた地図」と考えて良いのでしょうか？xy 座標 $\leftrightarrow$ 極座標を例にとって考えました．用途に応じて見方を変えて作った地図みたいな物かな，と思いました.

答. すばらしい．その通りです．極座標は良い例ですね.

問. 局所座標系の定義にあらわれる「開集合」はどこの開集合ですか？

答. もちろん考えている多様体の開集合です．多様体とは「アトラスの指定された位相空間」です．位相空間なので，部分集合が開集合かどうかは決まっていますね.

問. 局所座標系には，２次元平面での (x, y) のような表し方はできないのですか？

答. できます．多様体上の点を局所的に n 個の実数の組で表すのが局所座標系です．$\mathbf{R}^n$ の座標を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と書くとすると，多様体の(一部の)点が，この座標で表されます.

問. 局所座標系の定義のところで，$\psi \circ \varphi_\lambda^{-1}$ が C^r 級微分同相ならば $\varphi_\lambda \circ \psi^{-1}$ も微分同相，ということでしたが，それはどうして示すのですか？

答. C^r 級微分同相の定義から，**C^r 級微分同相の逆写像は C^r 級微分同相**です．線形代数で，正則行列の逆行列は正則行列である，ということを習ったと思いますが，それと似た状況(アナロジー)ですね.

問. $\dim N = n$ の n は $n = \infty$ でも成り立つのですか？

答. 前回の回答書にも書いたように，この講義では，n は有限としています.

問. ★アトラス $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in *}$ と $\mathcal{U}' = \{(\mathcal{W}_{\lambda'}, \psi_{\lambda'})\}_{\lambda' \in *'}$ が「同じ C^r 多様体の構造をきめる」の定義は，(1) $\forall (W_{\lambda'}, \psi_{\lambda'}) \in \mathcal{U}'$ は $\mathcal{U}$ に関する C^r 局所座標系であり，かつ (2) $\forall (U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{U}$ は $\mathcal{U}'$ に関する C^r 局所座標系ある，の２つの条件ですが，一方は他方から従わないのですか？

答. なるほど．良く気が付きましたね．従います．そのことを証明してみてください.

問. ★ N 上の２つのアトラス $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in *}$ と $\mathcal{U}' = \{(\mathcal{W}_{\lambda'}, \psi_{\lambda'})\}_{\lambda' \in *'}$ が同じ C^r 多様体の構造をきめる $\Leftrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ は C^r アトラス，という書き方はできるのですか？

答. なるほど．できます．できることを証明してみてください.

問. ★２つの C^r アトラスが「同じ C^r 多様体の構造をきめる」は同値関係のようですが，推移律はどうやって示すのですか？

答. なるほど，確かに推移律がすこし難しいですね．$\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}'$ が「同じ C^r 多様体の構造をきめる」とき，$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}'$ と書くことにすると，$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}, \mathcal{U} \sim \mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{U}' \sim \mathcal{U}$, はよいが，$(\mathcal{U} \sim \mathcal{U}' \ \&\ \mathcal{U}' \sim \mathcal{U}'') \Rightarrow \mathcal{U} \sim \mathcal{U}''$ が問題ということですね．定義通りに示していくと，$\forall (V, \rho) \in \mathcal{U}''$ (添字は証明に必要がないのでここでは書いていません) と，$\forall (U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{U}$ に対し，$\rho \circ (\varphi_\lambda)^{-1}$ が C^r 微分同相であることを示すわけですが，同相である部分はよいので，示すべきことは，これが C^r 級であることと，逆写像が C^r 級であることです．ところが，$\rho \circ (\varphi_\lambda)^{-1}$ の定義域の各点に対し，$\exists (W_{\lambda'}, \psi_{\lambda'}) \in \mathcal{U}'$ があって，$\psi_{\lambda'}(W_{\lambda'} \cap V)$ がその点を含みます. ($N = \cup_{\lambda' \in \Lambda'} W_{\lambda'}$ なので)．ですから，その点の近傍で，$\rho \circ (\varphi_\lambda)^{-1} = \rho \circ (\psi_{\lambda'})^{-1} \circ \psi_{\lambda'} \circ (\varphi_\lambda)^{-1}$ は C^r 級です．($\rho \circ (\psi_{\lambda'})^{-1}$ と $\psi_{\lambda'} \circ (\varphi_\lambda)^{-1}$ がともに C^r 級だから)．定義域のすべての点で C^r 級なので，$\rho \circ (\varphi_\lambda)^{-1}$ は C^r 級です．逆写像 $\psi_{\lambda'} \circ \rho^{-1}$ が C^r 級であることも同様に示すことができます．(対称性から明らか).

問. ★アトラスの同値類の個数が有限個なものはありますか？

答. $\dim N = 0$ なら(たとえば，N が１点なら)，どんなアトラスも同値なので，同値類は１つです．つまり多様体の構造は一意的にきまります．しかし，$\dim N > 0$ なら同値類は無限個あります．たとえば，$N = \mathbf{R}$ の場合，$\psi_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \psi_i(x) = x^{2i+1}, i = 0, 1, 2, \ldots,$ とおき，１つのチャートからなるアトラス $\mathcal{U}_i = \{(\mathbf{R}, \psi_i)\}$ は，i が異なれば，同値ではありません．したがって，同値類は無限個あります．(このことを指摘している質問書がありました．ちなみに，その質問書には A をつけました．) 一般の場合も同様の構成で証明できます(たぶん)．証明をつけてみてください．そしてそれを質問書に書いてください．(この質問は初めて聞く新鮮な質問です．ですから通常の教科書には，このようなことは書いていないと思います．)

問． 連続写像 $f:N\to P$ が点 $x\in N$ で C^k 級であるという条件が，局所座標系のとり方によらない，と言っていた意味がわかりません．

答． $1\leqq k\leqq r$ のとき，x のまわりの C^r 局所座標系と $f(x)$ のまわりの C^r 局所座標系のとり方によらない，ということですが，それがどういう意味か，という質問ですね．定義にある $\varphi\circ f\circ\psi^{-1}$ が $\psi(x)$ で C^k 級であるという条件と，φ,ψ を別の φ',ψ' にとりかえたときの，$\varphi'\circ f\circ\psi'^{-1}$ が $\psi'(x)$ で C^k 級という条件が同値な条件である，という意味です．

問． C^k 級写像の k は unique に決まりますか？

答． 決まりません．C^k 級ならば C^{k-1} 級でもあり，C^{k-2} 級でもあり，... C^1 級でもあります．

問． ★ C^r 多様体の間の連続写像が C^k 級ということを定義しましたが，そのとき $1\leqq k\leqq r$ という制限がありました．これはなぜですか？k が $r+1$ 以上のときを考えても意味がないのですか？

答． そうです．意味がないからです．C^r 局所座標系のとり方によってしまって定義できないからです．

問． ★ C^r 級写像 $f:N\to P$ の定義のところで，f が連続という条件をはずすことはできないのでしょうか？

答． できません．というのは，連続性があるおかげで，定義に出てくる $\psi(V\cap f^{-1}(W))$ が開集合となるからです．

問． 可微分写像 (C^k 写像) で $k=0$ のときは定義できないようですが，それはなぜですか？

答． $k=0$ は写像が連続という条件なので，すでにわかっていることだから定義から除外しているだけです．

問． $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x)=\dfrac{\partial(h\circ\psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(x))$ と書くとのことですが，これは局所座標系 ψ のとり方によらないのですか？

答． よります．ですからこの略記法は，あくまで，局所座標系が指定されている場合に使うことができます．

問． S^2 を北半球，南半球，南北回帰線内の３つの開集合に分けたときにできるアトラスの写像のとり方を教えてください．

答． たとえば，立体射影を使えばよいと思います．

問． ★次元の等しい多様体どうしの可微分写像で，位相空間の同相写像や，群の同型写像などのように特別に意味のある写像はありますか？

答． 微分同相写像です．

問． 射影空間のところで,「直線を点として考える」という意味がわかりません．

答． 直線を１つの要素 (メンバー) と考えるということです．いわば,「法人会員」です．

問． ★一般に位相空間の図式

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ S_1/\sim_1 & \xrightarrow{\bar f} & S_2/\sim_2 \end{array}$$

(π_i は S_i から $S_i/\sim_i$ への標準写像 $(i=1.2)$ が可換であるとき,「f が同相写像 $\Rightarrow$ $\bar f$ が同相写像」は成立しますか？f が連続 $\Rightarrow$ $\bar f$ が連続，ということと，f が全射 $\Rightarrow$ $\bar f$ が全射，ということは言えますが，$\bar f$ が単射であることは言えません！

答． よく考えていますね．すばらしい．でも，成立しないので，当然証明することは不可能です．(反例があります．たとえば，$S_2/\sim_2$ が１点になるような場合)．$\bar f$ が単射であることを初めから仮定して，$\bar f^{-1}$ が連続であることを証明してみてください．

問． 可微分写像とは何ですか？

答． 可微分写像とは C^r 級写像 $(r\geqq 1)$ の総称であると思ってください．しばらくしたら，主に C^∞ 級写像に話を限るので，可微分写像といったら C^∞ 級写像を指すことにします．

問． 位相空間にアトラスを与えるのは人為的なことに思えます．

答． 慣れないうちはそう思うのも自然かなと思います．でも，私 (石川) は必ずしも人為的なことが悪いことであるとは思いません．数学は科学ですが，もともと科学とは，自然を人為的に研究することではないでしょうか？人間がすることは，すべて人為的です．問題は人為的に何をするか，ということですね．講義で説明した定義が,「多様体」という対象を調べようという理性から「自然に導かれた定義」であることは，もうすこしつきあってみたらわかるかな，と思います．

問． 幾何学的な思考はどうも苦手で，定義をおぼえたところで，それの意味することが何なのか，想像できません．$\mathbf{R}^3$ 空間をイメージするのが精一杯です．

答． $\mathbf{R}^3$ がイメージできれば十分です．われわれは実際は２次元的な映像 (射影) を見ているわけで，その情報だけから３次元空間を想像できるなんて，本当にすばらしいことですね．

問． 次回予告をしてください．授業だけでは質問がなかなか書けません．お願いします．

答． 予習をして質問を考えたいということですね．了解しました．忘れなければ，次回の講義内容の予告をすることにしましょう．忘れていたら，その場で指摘してくれると助かります．

回答者から一言．質問と補足説明を分けて書いてください．分けて書いていない質問書は，いくら良い質問を書いても，零点としています．注意してください．それから，回答が見当たらないときは，回答が書きづらいか，質問の意味がわからなかったからだと思うので，直接質問してみてください．ではまた．