幾何学３質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ３ (２０００年１０月２３日) の分

問. チャートやアトラスというのは，１つの多様体にたくさん取ることが出来ますか？多様体によって一意に定まりますか？

答.「多様体」とは,「アトラスが与えられた位相空間」のことです．質問は，１つの (多様体になり得る) 位相空間にアトラスを設定する仕方がたくさんあるか？ということですね．たくさんあります．たとえば $N = \mathbf{R}$ のアトラスとして，$\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}, U_1 = \{x > 0\}, \varphi_1 : U_1 \to \mathbf{R}, \varphi_1(x) = x, U_2 = \{x < 1\}, \varphi_2 : U_2 \to \mathbf{R}, \varphi_1(x) = \frac{x}{2}$ が取れます．講義で説明したように，$\mathcal{U}' = \{(\mathbf{R}, \mathrm{id}_{\mathbf{R}})\}$ もアトラスです．さて，このようにたくさんとることができるアトラスのうちで，本質的に同じ取り方なのはどういう場合か，つまり,「アトラスの同値関係」という考え方を講義で説明します．上の $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}'$ は同値なアトラスです．それから「多様体の構造」の定義も説明する予定です．乞う御期待！

問. 例えば $\mathbf{R}^n$ には，不自然は気もしますが，他のアトラスも考えられると思います．開被覆や同相写像が違うときでも同じ多様体 $\mathbf{R}^n$ として見てもよいのですか？

答. 考えられます．そして同じ多様体と見てよい場合と悪い場合があります．たとえば，$\mathbf{R}^3$ の部分空間 (曲面) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^3\}$ を考えてみましょう．(この曲面を図示してみてください). ある出版社が，２つの地図製作業者 A 社，B 社に，S のアトラス製作を依頼しました．両社ともに１枚の地図 (チャート) で十分と見積もりを出しましたが，出来上がった地図をみると，２つの地図はかなり違っていました．調べてみると，A 社は xz 平面の目盛りを使っていたのに対し，B 社は yz 軸の目盛りを使っていることが判明しました．担当者は，１枚の地図からなるアトラスより，２枚の地図からなるアトラスの方が詳しいはずだから売れるだろうと，２枚の地図をセットで販売しました．しかし，その地図帳を購入した人から苦情が来てしまいました．聞いてみると，S の上の関数 x は，A 社の地図を使うと xz 平面上でやはり x で表わされるから，偏微分可能だけれど，B 社の地図を使うと yz 平面上で $\sqrt[3]{y}$ となって，y について偏微分可能でなくなり，混乱して夜も寝られなくなり思わず昼寝してしまった，とのことでした．そんなことの起こらないように，２つのアトラスは別々に扱うのが良かった，つまり,「多様体の構造として異なる」と考えたほうが良いというわけです.

問.「多様体とはアトラスを求めること」と言っていましたが，具体的にはどういうことなのでしょうか？「多様体」も地図帳のようなものをイメージすることによって考えやすくなるのでしょうか？

答. 簡単にいうと，多様体は「アトラスつき位相空間」のことです．ですから，多様体の例を挙げる場合，アトラスを決める必要があるわけです．たとえ話ですが，いわば,「地球」あるいは「世界」が多様体で,「世界地図帳」がアトラスです．世界地図を見れば世界のことがわかりますが，誰も世界地図帳そのものと実際の世界とを混同はしないですね．でも，世界中をくまなく旅することは誰にとっても不可能なので，地図帳を見て，世界の地理を調べるわけですね．もちろん，世界地図帳も「帝国書店世界アトラス」や「二宮書院世界地図帳」などいろいろ売っていますが,「同じ世界」を表わすアトラスです. そうでないと困りますよね．２つのアトラスが同じ世界をあらわすとすると，その２つのアトラスの間に矛盾があってはいけません．２冊のアトラスを合わせて使っても混乱しない，それが「２つのアトラスが同値」という定義の発想です．ところで，昔，大航海時代以前の世界地図帳は，今の世界地図帳とは違っていました．(ヨーロッパ中心の世界観で見ると) 南北アメリカ大陸などはまだ発見されていませんでしたから，その当時のアトラスは，もっと狭い世界しかカバーしていなかったはずです．ですから，そのときはまだ地球は多様体ではなかった，あるいは，多様体かどうかはわからなかった，ということができます.

問. 覆う対象である位相空間がコンパクトならば有限個のチャートで十分と思うのですがどうでしょうか？

答. その通りです．また，空間がコンパクトでなくても ($\mathbf{R}^n$ のように) 有限個のチャートでアトラスが構成できる場合もあります.

問. $S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$ をなぜ n 次元球面と呼ぶのでしょうか？$n+1$ 次元球面と呼ぶと何か都合が悪いのでしょうか？

答. n 次元というのはその空間自体のことを指し，どのような空間に入っているか，ということを指すわけではありません．S^n は，あくまで n 次元多様体です．$\mathbf{R}^n$ へのチャートを持ちます．$\mathbf{R}^{n+1}$ へのチャートはありません．S^n は n 次元です．$n+1$ 次元ユークリッド空間の中の n 次元球面です.

問． n 次元球面のチャートを作るところをもう一度かみくだいて説明してください．

答． 講義の説明が分かりづらかったようなので，ここでは，記号を変えて，そして，$n=2$ として説明してみましょう．2 次元球面 S^2 は 2 次元ですが，$\mathbf{R}^3$ の部分空間なので，３つの座標 (x_0, x_1, x_2) を使って表わされます．もちろん，条件 $x_0^2+x_1^2+x_2^2=1$ を満たさなければいけません．さて，$U_0^+ = \{(x_0, x_1, x_2) \in S^2 \mid x_0 > 0\}$ とおいて，$\varphi_0^+ : U_0^+ \to \mathbf{R}^2$ を $\varphi_0^+(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ で定めます．**図を描きながら読むことを薦めます**．わかりやすくするために，$\mathbf{R}^2$ の座標を (u_1, u_2) と書くと，写像 φ_0^+ の像は，$V = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 \mid u_1^2+u_2^2 < 1\}$ と表わされますね．というのは，$(x_0, x_1, x_2) \in U_0^+$ ならば，$x_1^2+x_2^2 = 1-x_0^2 < 1$ であり，逆に $u_1^2+u_2^2 < 1$ ならば $x_0^2 = 1-u_1^2+u_2^2, x_0 > 0$ という条件で x_0 を決めてあげると，$(x_0, u_1, u_2) \in U_0^+$ であり，$\varphi_0^+(x_0, u_1, u_2) = (u_1, u_2)$ となるからです．そこで，写像 $\psi_0^+ : V \to U_0^+$ を $\psi_0^+(u_1, u_2) = (\sqrt{1-u_1^2+u_2^2}, u_1, u_2)$ で定めると，ψ_0^+ は φ_0^+ の逆写像であり，φ_0^+ も ψ_0^+ も連続写像です．したがって，φ_0^+ は U_0^+ から V への同相写像です．同様に，たとえば，$U_1^+ = \{(x_0, x_1, x_2) \in S^2 \mid x_1 > 0\}$ について，$\varphi_1^+ : U_1^+ \to V$，$\varphi_1^+(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_2)$ とおくと，$(\varphi_1^+)^{-1}(u_1, u_2) = (u_1, \sqrt{1-u_1^2+u_2^2}, u_2)$ です．このようにして，球面を 8 つの開集合で被覆し，8 つのチャートを構成できます．このとき，たとえば，$U_0^+ \cap U_1^+ = \{(x_0, x_1, x_2) \in S^2 \mid x_0 > 0, x_1 > 0\}$ であり，$\varphi_0^+(U_0^+ \cap U_1^+) = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 \mid u_1^2+u_2^2 < 1, u_2 > 0\}$ であり，$\varphi_1^+(U_0^+ \cap U_1^+) = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 \mid u_1^2+u_2^2 < 1, u_1 > 0\}$ であり，$\varphi_1^+ \circ (\varphi_0^+)^{-1} : \varphi_0^+(U_0^+ \cap U_1^+) \to \varphi_1^+(U_0^+ \cap U_1^+)$ は，$\varphi_1^+ \circ (\varphi_0^+)^{-1}(u_1, u_2) = (\sqrt{1-u_1^2+u_2^2}, u_2)$ は C^∞ 級微分同相写像です．他の組み合わせでも同様です．以上のアトラスの作り方をまねて，一般の n について S^n のアトラスを一度**自分で**作ってみてください．(一度作れば十分です)．たとえると，水泳の本を読んでいるだけではわかりづらい，一度自分で泳いでみると納得がいくということでしょうか．

問． ★球面 S^n が多様体であることをみるのに，もっと簡単なアトラスはないのですか？S^2 の場合，S^2 を北半球と南半球と南北回帰線内の３つの開集合に分けると，講義で扱ったアトラスより簡単なアトラスが手に入りそうですが，どうでしょう？

答． 確かに，チャートの個数の少ないアトラスができますね．北半球と南半球を回帰線まで広げてとっておけば，２つのチャートでも可能ですね．同相写像の作り方は少し面倒になりますが．

問． n **次元射影空間**とはどのようなものですか？何を考えるときに使うのですか？幾何学の講義では，よく射影空間の話が出てきますが，なぜそういうものを考えるのですか？大切な概念なのですか？

答． 私 (石川) の好きな「射影幾何学」の舞台となる空間です．大切な概念です．$\mathbf{R}^n$，たとえば，$n=3$ として，$\mathbf{R}^3$ の平面や直線の話は，いわゆる「立体解析幾何」としておなじみですね．平行な異なる 2 直線は共有点を持たない... えっ？知らないって？そうですか... それでは議論が平行線になってしまいますが，それはともかく，その共有点は「無限遠 (むげんえん)」にあると考えられます．実際，２本の平行な鉄道の線路は遠くの方でほとんど交わっているように見えますね．(そんな広々とした景色は，日本にはもう無くなっていますかね)．それはともかく，数学的にはどうするか？ $\mathbf{R}^3$ に「無限遠平面」を付け加えて 3 次元射影空間を設定して，その中での直線を考えると,「すべての直線は射影空間の中に共有点を持つ」と言えます．このような操作は，たとえば，有理数から実数に世界をひろげると,「すべての有界単調数列は極限を持つ」と言えたり，実数から複素数に世界をひろげると,「すべての代数方程式は解を持つ」と言えたりするのと同じで,「世界をひろげる」という，数学では (でも？) 重要な考え方の１つです．

問． n 次元射影空間の定義 $\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^n - \{\mathbf{0}\})/\sim$ $(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Leftrightarrow \exists c \neq 0, c \in \mathbf{R}; \boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{x})$ で，$\mathbf{0}$ を除く理由がわかりません．

答． やはり，$n=3$ の場合に説明しましょう．(一般の場合は容易に類推できるので)．さて，3 次元射影空間は，$\mathbf{R}^3$ に「無限遠平面」を付け加えたものです．それを構成するために，次元を１つ増やして $\mathbf{R}^4$ の中で考えます．$\mathbf{R}^4$ の座標を (x_0, x_1, x_2, x_3) として，$\mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}^4$ の中の部分集合 $\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4 \mid x_0 = 1\}$ と同一視します．(想像できますか？) そして，この $\mathbf{R}^3$ の各点 $(1, x_1, x_2, x_3)$ と $\mathbf{R}^4$ の原点を結ぶ直線を考えます．(想像できますか？) 想像できなくても，とにかく，直線 $\{(t, tx_1, tx_2, tx_3) \mid t \in \mathbf{R}\}$ を考えます．いま，(x_1, x_2, x_3) は固定して，t を動かしています．こうして得られる直線は，(x_1, x_2, x_3) を動かしていくとたくさんできます．そして，このような直線たちと $\mathbf{R}^3$ を対応させることができます．でも，これらは $\mathbf{R}^4$ の原点を通る直線の全部ではありませんね．$\mathbf{R}^3$ の点と対応付けられないような直線は，原点を通り，$\{x_0 = 1\}$ と "平行な" 直線です．そのような直線は，$\{(0, tx_1, tx_2, tx_3) \in \mathbf{R}^4 \mid t \in \mathbf{R}\}$ という形をしています．ここでも，(x_1, x_2, x_3) を固定して，t を動かしています．この直線は $\{x_0 = 1\}$ とはまったく交わりません．このような考察から，$\mathbf{R}^4$ の原点を通る直線１つ１つを「要素」とする集合に注目すれば，それは $\mathbf{R}^3$ をひろげて「無限遠平面」を付け加えた空間となります．これが 3 次元射影空間

です.「無限遠平面」は，$\mathbf{R}^4$ の中の原点を通る直線たちのうち， $\{x_0 = 0\}$ に含まれるようなものからなる部分集合です．このように，$\mathbf{R}^4$ の原点を通る直線１つ１つを「要素」とする集合を 3 次元射影空間としているわけですが，$\mathbf{R}^4$ の原点を通る直線は一般に，$\{(tx_0, tx_1, tx_2, tx_3) \in \mathbf{R}^4 \mid t \in \mathbf{R}\}$ という形をしています．ここで，(x_0, x_1, x_2, x_3) は固定して t を動かしています．固定している (x_0, x_1, x_2, x_3) はこの直線の「方向ベクトル」です．方向ベクトルが零ベクトルだと，いくら t を動かしても直線ができませんね．**零ベクトルは何倍しても零ベクトル**です．零ベクトル以外なら，ちゃんと直線ができますね．ただし，平行な方向ベクトルは同じ直線を決めるので，$\mathbf{R}^4$ のベクトルから零ベクトルを除いて，それをある同値関係で割らないと，$\mathbf{R}^4$ の原点を通る直線を１つ１つの要素とする集合は得られません．その同値関係は，２つのベクトルが平行という関係なので，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Leftrightarrow \exists c \neq 0, c \in \mathbf{R}; \boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{x}$ で定義されます．というわけで零ベクトルが除かれます．このようにふか〜い理由があるわけです．わかりましたか？

問． n 次元射影空間は $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を通る直線の全体の集合と思える，とありましたが，もっと厳密な定義があるのでは？

答． これでも十分厳密で，しかもわかりやすい定義と思いますが，いかがでしょうか？

問． 射影空間のところで，比 $4 : 24 : 48$ を簡単にすると $1 : 6 : 12$ になるというのは，何の具体例ですか？射影空間の「射影」とはどういう意味なのですか？

答． 射影空間の要素 (あるいは点) の具体例です．射影空間の定義に出てくる同値関係を良く見ると，ベクトルの成分の「比」を考えていることになっています．つまり，上の場合，$\boldsymbol{x} = (4, 24, 48) \in \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{x}' = (1, 6, 12) \in \mathbf{R}^3$ とおくと，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}'$ です．実際，$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{4}\boldsymbol{x}$ です．射影空間の「射影」というのは，原点から光を投影することをイメージした言葉だと思います．

問． 商位相とは一体何を表わすのですか？また，どのような場面で用いられるのでしょうか？

答． n 次元射影空間のように，よくわかっている位相空間 (この場合 $\mathbf{R}^n - \{\mathbf{0}\}$) をある同値関係 (この場合 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Leftrightarrow \exists c \neq 0, c \in \mathbf{R}; \boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{x}$) で割って，商集合を考えたときに，その商集合に自然に入れる位相です．いろいろな場面で用いられますが，典型的な例が，まさに射影空間の位相を定める場面です．

問． 2 次元射影空間から小円板を取り除くとメビウスの帯になるのですか？

答． なります．$\mathbf{R}P^2 = (\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\})/\sim$ ですが，球面 $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ は $\mathbf{R}^3$ の原点を通る直線と必ず (原点に関して対称な) 2 点で交わるので，$\mathbf{R}P^2$ は球面の点 $\boldsymbol{x}$ と $-\boldsymbol{x}$ を同一視して得られます．(つまり，$\mathbf{R}P^2 = S^2/\sim$ と言い換えられます．ここで，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Leftrightarrow \boldsymbol{x}' = \pm\boldsymbol{x}$ です)．さて，球面から，北極の周りの円板と，原点に関して対称な，南極の周りの円板を除くと，帯 (円環) ができますね．そこで原点に関して対称な２点を同一視するとメビウスの帯になります．(円環を経線で半分に分け，その縦の２本の弧を反対側にくっつけることになるので)．このように，$\mathbf{R}P^2$ から円板を除くとメビウスの帯と同相になることがわかります．

問． n 次元射影空間と n 次元球面は多様体として異なるものと考えるのでしょうか？n 次元射影空間と n 次元球面は同型のように思いますが.

答． まったく異なります．もともと，**$\mathbf{R}P^n$ と S^n は同相ではありません** ($n \geqq 2$)．上に書いたように，$\mathbf{R}P^2$ から円板を除くとメビウスの帯と同相であり，S^2 から円板を除くと円板になり，メビウスの帯と円板は同相でないことから，$\mathbf{R}P^2$ と S^2 は同相ではあり得ないことがわかります．より一般に，幾何学２で学んだ「基本群」を考えると，$n \geqq 2$ のときはつねに，$\pi_1(\mathbf{R}P^2) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ で，$\pi_1(S^n) \cong 0$ (自明な群) なので，基本群が同型でないから，この２つの空間は同相ではありません．

問． ★１次元射影空間は S^1 と同相ですか？

答． その通りです．皆さんも証明を付けてみてください．

問． $\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^n - \{\mathbf{0}\})/\sim$ で， $\mathbf{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ は $n+1$ 次元，$\mathbf{R}P^n$ は n 次元，そこから，“$\sim$ の次元”を $(n+1) - n = 1$ とすると都合が良さそうですが，うまく定義できますか？

答． 「ファイブレーション」あるいは「ファイバー束」という考え方に近いと思います．この場合，$\pi : \mathbf{R}^n - \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}P^n$ がファイブレーションとよばれるものになり,「ファイバー」が１次元になります．

問． 多様体の例は，講義で挙げた，$\mathbf{R}^n, S^n, \mathbf{R}P^n$ 以外にどのようなものがありますか？多様体の本には，他に，積多様体や開部分多様体などがありました．

答． たくさんあります．講義で述べた例に，積多様体や開部分多様体などの「多様体の例の一般的な構成法」を組み合わせていけばよいわけです．たとえば，$S^1 \times S^1$ はトーラスを表わします．$S^n \times S^m$

や $S^n \times \mathbf{R}P^m$ やその開集合などなど，無数に例を作ることができますね.

問. $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ は何級微分同相写像になるのですか？

答. C^∞ 級です．ですから，当然 C^1 級でも C^2 級でも C^3 級でもあります.

問. 定義「φ : (微分) 同相 $\Leftrightarrow$ φ : 全単射かつ φ, φ^{-1} 共に連続 (かつ微分可能)」のうちで，φ^{-1} が連続 (微分可能) ということは外せませんよね.

答. 外せません.

問. 違う位相を入れるとチャートなども違うものになりますか？たとえば n 次元射影空間でも，違う位相を入れた場合は違う結果になっていたのですか？

答. もちろんそうですね.

問. ★多様体の定義の中でパラコンパクト性は，局所的にユークリッド空間とハウスドルフ性から出てこないのでしょうか？また，第一可算公理とパラコンパクト性は，何か関係がありますか？

答. 出てきません．パラコンパクト性は第１可算公理ではなく，第２可算公理と関係します．(局所的にユークリッド空間と同相ということから，第１可算公理は自動的に従いますね).

問. M, M' を多様体としたとき，M, M' がホモトピー同値ならば，それぞれの被覆 $U_{\lambda\lambda\in\Lambda}, U'_{\lambda'\lambda'\in\Lambda'}$ の最小濃度は一致するのでしょうか？また，被覆の最小濃度には幾何学的な意味はありますか？

答. 一般の開被覆ではなく，そこにホモトピー同値に関係した条件，つまり，開被覆を構成する開集合が「可縮」という条件をつけた中での最小濃度は,「カテゴリー」(圏という意味とは別の位相幾何での用語) とよばれ実際に研究されています.

問. 位相空間における開集合と一般の集合における開集合はどのように違うのでしょうか？

答. 開集合を考えるのは位相空間だけです.「一般の集合における開集合」などというものはありません.

問. 多様体は図形というより空間なのですか？「多様体上で微分する」というフレーズも聞いたことがありますし，どうやら多様体とは何か空間なのではないでしょうか？

答. ほほう．言われてみるとそうですね．もちろん,「図形」とは何か,「空間」とは何か，明確でないので，あくまで雰囲気，ニュアンスということに関してですが.

問. 幾何学の魅力を教えてください．数学にはいろいろな分野がありますが，なぜその中で幾何学に興味を持ったのですか？数学は分野があるといっても，かなりリンクしていると思うのですけれど，そういう面でも，いろいろな分野のことを勉強した方がよいのでしょうか？最近，自分の面白いと思ったことしかできなくなって，やばいのではと思います.

答. 私 (石川) は，幾何学はどの分野にも遍在していると考えています．(「偏在」ではなく，“あまねく” 存在するという意味の「遍在」です)．とくに幾何学の分野だけに興味をもっているわけではなく，どんな分野の話題でも,「幾何学的に見てみたらどうなるだろう」と考えてみる，というこだわりをもって生きています．思うに，どんな分野にせよ，その分野の良い仕事する人には，幾何学的なセンスがあるようです．さて，それはともかく，もちろんいろいろな分野のことを勉強した方がよいに決まっています．でも，自分の面白いと思ったことしかできないのは自然なことですね．誰でもそうでしょう．**面白くないことはやる必要はありません**．ただし，何を面白いと思い，何を面白くないと考えるかには，個人差があります．同じ個人でも，年齢とか，見識とか，周囲の環境とか，精神状態などによって少しずつ変わるのが普通です．人間が成長すれば (堕落すれば?)，好みや興味の対象も少なからず変わってきます．ですから，目先の興味で即断せずに，気長に幅広く知識を吸収して視野をひろげ,「面白さ」の質やレベルを高めていきながら，しかしその中で，自分の感性に自信をもって，面白いと思ったことを次々に追いかけていけばよいので，全然やばくないと思いますよ.