幾何学３質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ２ (２０００年１０月１６日) の分

問． ヤコビ行列が「写像の線形化」であるとは何を指しているか教えてください．

答． 微分積分で習ったように，関数のグラフ $y = f(x)$ の $x = a$ での接線の方程式は，微分を使って，$y - f(a) = f'(a)(x - a)$ で表されますね．２変数関数のグラフ $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ での接平面の方程式は，偏微分を使って，$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ で表されますね．これらは，**関数の線形近似**あるいは**１次近似**とよぶべきものたちです．では，一般の写像 $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_p = f_p(x_1, \dots, x_n)$ の $(x_1, \dots, x_n)(= \boldsymbol{x}) = (a_1, \dots, a_n)(= \mathbf{a})$ での線形近似は何でしょう？実はそれがヤコビ行列です．(より正確には，ヤコビ行列で表現される線形写像です．実際，可微分写像 $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ のグラフの接空間は，$\mathbf{y} - f(\mathbf{a}) = J_f(\mathbf{a})(\boldsymbol{x} - \mathbf{a})$ で表されます．(ここで，$\mathbf{y} - f(\mathbf{a})$ や $\boldsymbol{x} - \mathbf{a}$ は縦ベクトルと思っています．)

問． ヤコビアンとはどんなものですか？以前積分を習ったときにも，変数変換したときに被積分関数にヤコビアンをかけていました．ある種のゆがみを表すものなのでしょうか？

答． なるほど「ゆがみ」ですか．それもよいですが，ヤコビアンは「ヤコビ行列の行列式」であり，ヤコビ行列は写像の線形化であり，行列式は面積や体積の倍率を表わすものなので，ヤコビアンは写像のそれぞれの場所での「のび縮み具合」「面積や体積の拡大縮小度」を表わす，といった方がピッタリかなと思います．

問． ★ n 次元 C^r 多様体 N の “n 次元” というのは，N の開被覆のとり方によって変化したりはしないのですか？

答． 良い質問ですね．変化しません．C^r 級の r が 1 以上のときは，C^r 多様体の次元は **接ベクトル空間**の次元として定まります．$r = 0$ の場合，つまり位相多様体の次元の不変性については，少し難しいですが，幾何学４の講義で扱うホモロジー群を応用することによって証明できます．

問． 陰関数定理がよくわかりません．結局のところ，等高線は局所的にみると平行な直線とみなすことができる，と言っていると考えてよいのでしょうか？

答． おおよそ良い理解ですね．C^r 級写像 $f : U \to \mathbf{R}^p$ $(U \subset \mathbf{R}^n)$ の正則点の近くでは，すべての “等高線” $f^{-1}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$, が,「局所微分同相写像というレンズ」を通してみると，平行に見えるということですね．ただし，この場合は，$f^{-1}(\mathbf{y})$ はその正則点の近くで，$n - p$ 次元の多様体になります．ところで，逆関数定理や陰関数定理は存在定理です．“しかじかの条件をみたす局所的な微分同相写像が存在する” というタイプの定理です．存在定理は理解するのが難しいかもしれません．まあ，徐々に理解してください．

問． 陰関数定理に出てくる微分同相写像 σ についての，$\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ にはどういう意味があるのですか？

答． 「画面」のまん中に，点 $\mathbf{a}$ をもっていくということです．

問． 陰関数定理のところで，$f \circ \sigma^{-1}(x_1, \dots, x_{n-p}, x_{n-p-1}, \dots, x_n)$ とありましたが，この $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{n-p}, x_{n-p-1}, \dots, x_n)$ はどこに属しますか？

答． $\sigma : V \to W$ なので，当然 $\boldsymbol{x} \in W$ ですね．

問． 同相になるかどうかを調べるには，いちいち写像を与えなければならないのですか？

答． そうです．でも考えてみると,「同相である」ことを示す方が「同相でない」ことを示す方が難しいのです．同相であることは，とにかくがんばって同相写像を１つ作ってあげればそれで OK ですが，同相でないことを示すには，同相写像が存在すると仮定して何らかの矛盾を導く (背理法) とか，いわゆる「不変量」を使って，同相ならその不変量が同じはずなのに不変量が異なるから同相でない，といった論法・工夫が必要になります．まあ，それが**幾何学の醍醐味** っていったところです．

問． 球面から１点をとり除いたものは，$\mathbf{R}^2$ と同相になりますよね．

答． なります．有名な立体射影によって同相写像が構成されますね．

問． f の逆写像 g と f^{-1} は同じですか？

答． 同じです．

問． $f : V \to W$ が C^r 級微分同相写像ならば，定義にでてくる，ある $g : W \to V$ も C^r 級微分同相写像ですか？

答． その通りです．よく気が付きましたね．

問． 微分同相は同相とどう違うのですか？

答． 微分同相写像には「逆写像が微分可能」という条件がついています．たとえば，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ について考えてみましょう．この f は同相写像ですが，C^1 微分同相写像ではありません．というのは，逆写像 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ は，(y を独立変数と考えて) $y = 0$ では微分可能ではないで

すね．(したがって C^r 微分同相写像ではありません $(r \geqq 1)$)．ところで,「2つの可微分多様体 (C^r 多様体, $r \geqq 1$) が同相のときは必ず微分同相になるか？」つまり,「同相写像があれば，必ず微分同相写像もあるか？」というのは難しい問題で，1970 年代にミルナーという人によって初めて，同相だが微分同相でない可微分多様体の例が構成されました．

問． ★ C^r 級微分同相写像について，写像することで，何が保存されますか？２点間の距離とか，角度とかが変わるのでしょうか？

答． 距離や角度は一般には変わります．(つまり，変わらないこともあるけれど，変わる場合もあります)．変わらないのは，たとえば,「曲線の滑らかさ」です．簡単のため，C^r 級微分同相写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ と C^r 級曲線 $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (定義域が１次元の場合，その写像を「曲線」とよぶことがあります) について考えると，c を f で写してできる曲線 $f \circ c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ も C^r 級になります．

問． 微分同相写像の具体例などを出してくれると理解しやすいです．

答． $V = \mathbf{R}, W = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ として，写像 $f : V \to W$ を $f(x) = e^x$ で定めましょう．このとき f は C^∞ 級微分同相です．逆写像は何でしょう？

問． C^r 微分同相写像かどうかを調べるには定義から導くことは難しいですか？

答． 簡単な場合もあるし，難しい場合もあります．これでは答えになっていませんかね．上の $f(x) = e^x$ の場合は難しくないです．

問． C^0 級 $\Leftrightarrow$ 連続が納得できないです．

答． これは単なる言葉の約束です．

問． 合成写像 $g \circ f$ のヤコビ行列が $J_{g\circ f}(\boldsymbol{x}) = J_g(f(\boldsymbol{x}))J_f(\boldsymbol{x})$ となるのは高校で習った微分の公式と同じと思ってよいのですか？また，行列だから $J_{g\circ f}(\boldsymbol{x}) = J_f(\boldsymbol{x})J_g(f(\boldsymbol{x}))$ ではダメですよね．

答．「同じ」の意味がわかりませんが，ともかく,「大学で習った偏微分の公式」(と行列の掛け算の定義) からすぐにわかる公式です．もちろん，$J_{g\circ f}(\boldsymbol{x}) = J_f(\boldsymbol{x})J_g(f(\boldsymbol{x}))$ ではダメです．(どうしてダメなのか自分でよく考えてみることを薦めます)．

問． 恒等写像の意味がわかりません．

答． 集合 V から V への写像が恒等写像とは，任意の $x \in V$ に対し，$x \in V$ そのものを対応させる写像のことです．つまり「何もしない」ということですね.「放っておく」ということです．Let it be. したがって，逆写像とは，“写像が散らかしたものを元通りに片付けることである” と言えますかね．

問． N が n 次元 C^r 多様体で，A が N の部分空間のとき，$A \cap N$ も n 次元 C^r 多様体になりますか？

答． A が N の開集合であればなりますが，一般にはなりません．前回の回答書で説明した例，$N = \mathbf{R}^2, A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1x_2 = 0\}$, を参考にしてください．ところで，質問の場合 $A \cap N = A$ ですね．

問． 多様体の定義で,「$N = \cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ 開被覆」とありましたが,「$N \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ (U_λ：開)」ではダメですか？

答． ダメではありませんが，U_λ は N の開集合なので，$U_\lambda \subset N$ だから，$\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda \subset N$ は常に成り立つので，まったく同じことになります．書き換えても無意味なわけです．

問． $\forall x \in N, \exists U; N$ の開集合，$x \in U$, U は $\mathbf{R}^n$ と同相，となる位相空間 N は n 次元位相多様体でしょうか？

答． ハウスドルフでパラコンパクトという条件を加味していますが，そうです．$\mathbf{R}^n$ と同相でなくても，$\mathbf{R}^n$ の開集合と同相ではれば OK です．

問． N が多様体のとき，$\#(N) = \aleph$ ですか？

答． $\#(N) \leqq \aleph$ であることが知られています．

問． 正則点，臨界点はどのようにイメージすればよいのですか？

答． たとえば，講義で説明したように，(“縦に置いた”) トーラスの高さ関数について考えると，臨界点は４点あり，それ以外のすべての点が正則点になります．陰関数定理の主張をもう一度読み返してみてください．

問． 正則点というイメージとしては，局所的に微分同相としてとらえてよいのでしょうか？しずめ込みという言葉からだと，沈点のようなものを連想してしまうのですが？

答． $f : U(\subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^p$ で，$n = p$ の場合はそれで良いです．逆関数定理がそれを保証しているわけです．$n > p$ の場合は，正則点と聞いたら，たとえば $(x_1, x_2) \to x_1$ (ここでは，$n = 2, p = 1$ としています)，を連想するとよいでしょう．ところで,「沈点」とは何ですか？

問． 陰関数定理の例で，トーラスを使っていましたが，トーラスを式で表すことはできるのでしょうか?

答． もちろんできます．自分で考えてみてください．

問． トーラスの高さ関数を考える場合，トーラスを横にしたら，臨界点は，上と下の２箇所の円周に

なりますか？

答． その通りです．

問．「正則」という言葉は，他の日本語に置き換えるとしたらどんな言葉が適当ですか？

答．「通常」とか「平凡」とか「一般大衆」とか「変でない」とか「まとも」などといったところでしょうか．

問．「正則点 $\Leftrightarrow$ 逆写像が存在して C^r 級」というのは成り立つのでしょうか？

答． 違います．逆関数定理のことを言っているのだと思いますが，正確ではありません．あくまで，「正則点 $\Leftrightarrow$ **その点の近傍で**逆写像が存在して C^r 級」であり,「C^r 級微分同相写像 $\Leftrightarrow$ 逆写像が存在して C^r 級」です．

問． 陰関数という名の由来は何ですか？

答． 微分積分で習う意味の「陰関数」で,「陽関数」の対義語です．$y = h(x)$ の形で「陽」に表現されているのが通常の関数ですね．これが陽関数ですが，そうではなく，$f(x, y) = 0$ という形の関係式で表わすとき「陰関数表示」とよびます．たとえば，関係式 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ は，関数 $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ を表わしますね．もともとの陰関数定理は，これが，いつ可微分関数を表わすか，それを保証する定理ですね．$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおいたとき，その十分条件は $f_y \neq 0$ でした．また，x が y の可微分関数で表わされる条件は，$f_x \neq 0$ です．ですから，一方が他方の可微分関数で表わされる十分条件は $(f_x, f_y) \neq (0, 0)$ です．つまり，f のヤコビ行列 (この場合は 1 行 2 列行列) の階数が 1 という条件です．つまり，正則点の条件になるわけです．この講義で紹介した陰関数定理は，微分積分の陰関数定理のこのような意味での一般化になっているわけです．

問． 臨界点の性質は授業で扱われるのですか？

答． 扱う予定です．ところで，微分積分の極大極小問題のところで，臨界点の重要さはすでに習っていますよね．

問． 論理記号１つ１つの意味はわかるのですが，全体的にみると何が何だかよくわからなくなってしまいます．

答． 具体例で遊んでください．**具体例をたくさん知ること，これが数学を正しく学ぶ方法です**．

問． パラコンパクトの定義がよくわかりません．

答． 図書室で,「位相空間」の本をひもとけば，５分でわかります．調べてみてください．(多様体の習い始めにはこだわらない方がよいので，自習に委ねたいと思います)．

問． パラコンパクトだかコンパクトでない例を教えてください．

答． $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 1)$ は，パラコンパクトであるがコンパクトでないような典型的な例です．

問． 今日の講義の n 次元 C^r 多様体の定義で，$n = \infty$ のときは，今日の講義の多様体に含まれますか？

答． うむ．この講義では n は有限としています．$n = \infty$ ということは，**無限次元多様体**ということですね．無限次元多様体をどう定義し，どう研究するか，ということは現代数学の基本的課題であり，盛んに研究されています．しかし，(私見では) 標準的な定義はまだまだ確立していないようです．

問． ★ 以前 n 次元ユークリッド空間は，“n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ に内積 $(\cdot, \cdot)$ $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ と表される内積を付与したもの” と習いました．また，今回の授業のように距離の概念を付与したものと習いました．この２つの定義の仕方をもつユークリッド空間は結局同じものなのですか？

答． 厳密に言えば違いますが，密接に関係するので，同じ名前がついていると考えるのが良いと思います．質問の意味の空間は「n 次元計量ベクトル空間」あるいは「n 次元内積空間」などとよばれるものです．実は，この講義で「多様体の接ベクトル空間」という概念を学ぶのですが，n 次元数空間 $\mathbf{R}^n$ は多様体であり，その接ベクトル空間は n 次元数ベクトル空間としての $\mathbf{R}^n$ であり，そこに内積を考えることは，$\mathbf{R}^n$ にいわゆる「リーマン多様体」の構造を入れることであり，そうしたときの $\mathbf{R}^n$ が講義の意味での n 次元ユークリッド空間になるわけです．どうです，すこし “ややこしい”ですが，わかりましたか？このように，どういう名前をつけるかにも，いろいろふか〜い理由があるわけです．

問． $\mathbf{R}^n$ の部分集合でない位相空間から $\mathbf{R}^p$ への写像というのはどのように定義されるのですか？

答． まず「$\mathbf{R}^n$ の部分集合でない空間」を想像するのが難しいですか．でも，ただの写像なら，どのようにでも定義できますね．ところで，実は，どんな可微分多様体も，次元の高い $\mathbf{R}^N$ の「部分多様体」になることが知られています．問題は**可微分多様体から可微分多様体への可微分微分をどう定義するか**，ということです．実はそのことは，この講義の重要なテーマです．局所座標系をとって定義します．全体で見ないで，部分的に判定するわけです．たとえると，中央集権ではなく地方分権ということであって，多様体の発想は「地方の時代」に通じるかなと思います．

回答者からの補足説明． ところで，写像の制限の記号は，f/V ではなく，$f|_V$ です．ではまた．