幾何学３ (多様体入門) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １１ (２００１年２月５日) の分

問． 微分形式や外微分は，どのような意味をもって，何に役立つのですか？微分１形式を外微分するということは，言い換えると何を意味するのですか？

答． 難しい質問ですね．まず，微分形式の意味ですが，微分１形式は，ベクトルあるいはベクトル場を評価するものと考えられます．つまり，接ベクトルが与えられると,「その方向への変化量」という意味をもつ数値を出力するものという意味あいがあります．そのことから，微分形式は「線積分」と密接に関係します．平面上の線積分 $\int_c a_1(x_1,x_2)dx_1 + a_2(x_1,x_2)dx_2$ は，$\mathbf{R}^2$ 上の微分１形式 $a_1(x_1,x_2)dx_1 + a_2(x_1,x_2)dx_2$ の曲線 c に沿った積分を意味します．曲線の速度ベクトル場を微分１形式で評価して，関数にして，それを積分するわけです．同じように，曲面積分を考えるときは，微分２形式を曲面上で積分します．さて，平面上でも曲面上でもよいですが，その上の線積分が，曲線を動かしたときにどのように変わるかを調べると，微分形式が外微分が自然に出てきます．たとえば，始点を決めたとき，線積分 $\int_c a_1(x_1,x_2)dx_1 + a_2(x_1,x_2)dx_2$ の値が終点だけによって，経路には関係しない条件は，$a_1(x_1,x_2)dx_1 + a_2(x_1,x_2)dx_2$ の外微分 $d(a_1(x_1,x_2)dx_1 + a_2(x_1,x_2)dx_2) = 0$，つまり，条件 $\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}$ になります．このことは，微積分やベクトル解析でおなじみのことですね．それらを多様体の上で考えることにより，より深く理解しようとしているわけですね．

問． 微分形式は，ベクトル解析を習った時点では，計算の道具のように感じて使用していたような気がします．

答．「計算」とは何か，というのが問題ですが，もし，ある概念があり，それを意識することで，計算が見通しよくでき，新しいことが見つかるならそれはすばらしい道具ですね．そういう意味で，微分形式は，計算のすばらしい道具です．でも，私 (石川) が考えるところでは，**いまだに人類は微分形式を十分に使いこなしていない**と思います．

問． 余接ベクトル空間 (cotangent vector space) と微分形式 (differential form) の関係は何ですか?(再掲)

答． 多様体の各点に対し，その点における余接ベクトルを１つ対応させる規則が微分 1 形式 (differential one-form) です．しかもその対応の仕方が C^∞ 級であるものをこの講義で扱います．ところで，ベクトル場 (vector field) は，多様体の各点に対し，その点における**接ベクトル**を１つ対応させる規則でしたね．微分形式とベクトル場とを関連付けて理解するとよいと思います．(修正して再掲)．

問． 微分１形式は全微分と似ていますが，関係ありますか？

答． 関係があります．関数 $h(x)$ に対し，$dh(x) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x)dx_i$ ですが，これは，微分積分学で習った全微分ですね．この講義で説明している外微分と同じものです．そして，微分１形式の特別なものです．ちなみに，外微分は，関数 (微分０形式) だけでなく，一般の微分形式 (微分１形式，微分２形式,...) に対し定義されます．

問． 微分１形式を $\alpha(x)$ のように書いていますが，つまりこれは関数のようなものですか？

答． そうですね．関数は英語で function，この場合は，x を入力すると，ベクトル (この場合，余接ベクトル) を出力するものですね．ベクトル値関数です．あるいは一般的な用語で「写像」(mapping) です．N から T^*N への写像です．$\alpha : N \to T^*N$ です．

問． T^*N の元とはどういうものなのでしょうか？

答． $T^*N = \cup_{x\in N} T_x^*N$ です．和集合です．ですから，T^*N の元とは，ある x について T_x^*N に属する元のことです．ただし，普通，和集合というのは，１つの集合内の部分集合に対して考えるものであり，この場合，以前も回答書に書いたように，余接ベクトル空間 T_x^*N は抽象的に考えているので，どこにあるのか決まっていません．ですから，これは和集合と言っても，いわゆる，disjoint union です．ディスジョイント・ユニオンです．T_x^*N を，点 x が違えば違うものと見て，それらを一緒に考えたものが，T^*N です．

問． 局所座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対し，$\alpha(x) = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n$ ですが，局所座標系 $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ ととるとどうなるのですか？

答． 余接ベクトル (cotangent vector) と同じ変換公式に従います．$dx_i = \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j'} dx_j'$ という公式なので，見やすいですね．

問．「形式」とはどういうニュアンスですか？

答． ニュアンスを伝えるのは難しいです．昔から使われている「１次形式」とか「２次形式」という用語があります．現代の教程ではあまり教えられていないのが遺憾です．知らないのは，皆さんの世代あた

りからかなと想像します．別の用語で言い換えると，１次同次式とか２次同次式という意味です．つまり，$\sum_{i=1}^n a_i x_i$ とか，$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ といった式です．太古の昔から人類が親しんできた式です．

問． N 上の微分１形式の説明の所の図の意味がわかりません．

答．「微分１形式は，N の各点 $x \in N$ に対し，T^*N の１つの要素を指定する」という意味です．

問． 微分１形式はベクトル場の双対版と考えも良さそうな気がしますが，いかがでしょう？

答． その通りです．いま，多様体 N 上の C^∞ 微分１形式の全体の作るベクトル空間を $\Omega^1(N)$ と書き，C^∞ ベクトル場の全体の作るベクトル空間を $\Theta(X)$ と書き，N 上の C^∞ 関数の全体の作るベクトル空間を $\Omega^0(N)$ と書くと，双線形形式 $\Phi : \Omega^1(N) \times \Theta(N) \to \Omega^0(N)$ が，$\Phi(\alpha, X)(x) = \langle \alpha(x), X(x) \rangle, (x \in X)$ で定まります．このとき，Φ は非退化です．つまり，任意の $\alpha \in \Omega^1(N)$ に対し，$\Phi(\alpha, X) = 0$ となるような $X \in \Theta(N)$ は $X = 0$ に限り，任意の $X \in \Theta(N)$ に対し，$\Phi(\alpha, X) = 0$ となるような $\alpha \in \Omega^1(N)$ は $\alpha = 0$ に限ります．こういった状況の場合，もちろん目的意識によりますが，$\Omega^1(N)$ と $\Theta(N)$ は互いに双対関係にあると言うことができます．

問． 外微分の逆の操作 (外積分？) はありますか？

答． １変数の場合はありますね．不定積分ですね．一般には外微分は全射ではないので逆はなく，像に制限したとしても一意的に逆は決まりません.「関数の外微分にならない微分１形式が存在する.」

問． $d(h\alpha) = dh \wedge \alpha + h d\alpha,\ d(dh) = 0$ というのは定義から導かれるのですか？

答． 導かれます．簡単にわかります．ぜひ証明してみてください．

問． $d\alpha = 0 \Rightarrow \exists h, \text{s.t. } dh = \alpha$ は成立しますか？

答． $\mathbf{R}^n$ 上では成立します．$\mathbf{R}^n$ の単連結な領域上で成立します．いわゆる「ポアンカレの補題」ですね．一般に，単連結な多様体上で成り立ちます．より一般に「１次元ド・ラームコホモロジーが消えている」多様体の上で成立します．

問． n 次元多様体における微分 n 形式の外微分は 0 ですか？

答． その通りです．微分 n 形式の外微分は微分 $n+1$ 形式ですが，n 次元多様体の上の微分 $n+1$ 形式は 0 しかありません．

問． 多様体上でも $\mathbf{R}^n$ 上のようにストークスの定理が成り立ちますか？

答． 成り立ちます．境界 ∂N を持つ n 次元多様体 N 上の微分 $(n-1)$ 形式 α に対し，等式 $\int_{\partial N} \alpha = \int_N d\alpha$ が成り立ちます．これがストークスの定理の一般形です．

問． なぜ C^∞ 級以外の微分形式は扱わないのですか？

答． この講義では簡単のために C^∞ 級の微分形式のみを扱っていますが，もちろん必要に応じて，他の場合も考えます，でも**基本を押さえておけば，応用がきく**ので，まず基本を説明しているわけです．

問． どうして $dx_i \wedge dx_j, 1 \le i < j \le n$ が $\Lambda^2 V^*$ の基底になるのですか？なぜ $\Lambda^2 V^*$ の次元が $\dfrac{n(n-1)}{2}$ になるのですか？

答． １次独立であり，かつ $\Lambda^2 V^*$ を生成するからです．$\Lambda^2 V^*$ は V 上の交代双線形形式 $\omega : V \times V \to \mathbf{R}$ の全体のベクトル空間を表しているわけですが，$V = T_{x_0} N$ の基底，$\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ に対し，数 $\omega(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j})$ を行列状に並べれば，n 次交代行列になります．これを ω の**表現行列**とよびます．逆に n 次交代行列を与えると，それを表現行列とする交代双線形形式が一意的に定まります．この対応は線形同型であることもわかるので，n 次交代行列の全体の空間の基底や次元がわかれば良いわけですね．ところで，交代行列は，対角成分はすべて 0 で，右上の成分 ($\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個) を決めれば，左下はそのマイナスとして決まってしまいます．n 次交代行列の全体の空間の基底として，$1 \le i < j \le n$ に対して，(i, j) 成分が 1 で，(j, i) 成分が -1 である交代行列がとれます．それを $\Lambda^2 V^*$ の中で考えれば $dx_i \wedge dx_j, 1 \le i < j \le n$ になるわけです．

問． ここでの外積は，物理に出てくるベクトル積と同じようなものと考えてよいのでしょうか？

答． 同じものです．外積の基本を正しく説明していると考えてください．ここで，以前別の講義の回答書に書いた例え話を書きます．参考になれば幸いです．さて，(あるベクトル空間 V の) ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ に対し，外積というもの，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ や $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ や $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ などといったものを考えるんですが，ところが，これらは，もともとの空間 V の住人ではない，というのが厄介なところです．つまり外積は宇宙人です．彼等が，バルタン星人なのか，ウルトラの星から来ているのかは，今は申しません．とにかく，V 星人ではないんです．しかし，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ は，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が１次従属であることを意味する，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$ は，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が１次従属であることを意味する，という具合に，非常に役にたつ正義の味方なのです．ところがですね，一部の心無い人達が，あいつらは何者なんだ，よくわからない奴だ，よそものだ，と，外積たちを差別し

て，いじめ始めたのです．そんな中，$V=\mathbf{R}^3$ 星では，この事態をなんとか収拾しなければ，という動きが起こりました．そこには，幸いに，勇者，標準基底３兄弟 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ が居たので，彼等に解決をゆだねました．３兄弟は，外積君たちに，仮の姿に変身して，$\mathbf{R}^3$ の住人になってもらおうと考え，外積組合の代表である $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ 老師に相談しました．相談の結果，どういう処置をしたかと言うと，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 君については，調べてみると，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{u}=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{u})\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ という関係式があり，$\mathbf{R}^3$ の各住人 $\mathbf{u}$ に対して，スカラー $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{u})$ を贈ったという功績が認められました．(賄賂ですね．) 一方，$\mathbf{R}^3$ に住んでいるベクトル $\mathbf{x}$ さんも，やはり，$\mathbf{R}^3$ の各住人 $\mathbf{u}$ に対して，スカラー $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}$ を配っていたのです．($\cdot$ は内積です．) これは何か因縁があるのではないか．そこで，どんな $\mathbf{R}^3$ 星人 $\mathbf{u}$ に対しても，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{u})$ となるような $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\mathbf{x}$ さん (ただ１人存在することがわかります) を呼んできて，実はあなたは，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 君の生まれ変わりなんですよ，と言いました．このように，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 君と因縁の深い $\mathbf{x}$ さんの名前が，恐ろしいことに $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ だったのです．そういう意味で，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ と同じということになります．また，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ 君については，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ なので，ここは，ひとつ，スカラー $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ そのものに変身してもらおうということになりました．では，質問です．$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ 老師の $\mathbf{R}^3$ 星での姿は何でしょう？また，外積組合副理事 $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ の $\mathbf{R}^3$ 星での姿は何でしょう？

問． 1 形式，2 形式などとテンソル積との間には，どのような関係があるのですか？

答． 深い関係があります．たとえば，$V^*\otimes V^*$ は，V 上の交代２形式の全体の作る部分空間と，対称２形式の作る空間の直和に分解されます．

問． 交代２形式は基本２形式と同じものですか？

答． 違います．しかも基本２形式は対称２形式ですからまったく違うものです．

問． 数学序論８で，以前，微分 0 形式は点，微分 1 形式は平面，微分 2 形式は空間，微分 3 形式は領域，と習った気がします．

答． きっと何かの勘違いでしょう．「微分」をとると，0 形式は点，1 形式は直線，２形式は平面，3 形式は空間を (スカラー倍を除いて) 表す，というのは正しいです．

問． 双線形写像の値域はなぜ $\mathbf{R}$ なのですか？なぜ $\mathbf{R}^n$ は考えないのでしょうか？

答． 考えます．この講義ではたまたま双線形写像 $V\times V\to\mathbf{R}$ の場合だけ必要だったのですが，もちろん，双線形写像 $V\times V\to\mathbf{R}^n$ を考える必要のある場合もあります．

問． $(V^*)^*\cong V, T_x^{**}N\cong T_xN$ についてもう少し説明してください．「自然に同型」と前の質問の回答にありました．

答． V^* の要素 α と V の要素 u に対し，クロネッカー積 $\langle\alpha,u\rangle$ が決まりますが，これは，$\alpha:V\to\mathbf{R}$ ということを意味すると同時に，見方を変えれば，$u:V^*\to\mathbf{R}$ と思えますね．つまり，$u\in(V^*)^*$ と考えられます．何も余分なデータがなくても自然にそうなりますね．そして，この対応 $V\to(V^*)^*$ が線形同型になることも容易に検証されます．そういう意味で「自然に同型」と言ったわけです．

問． ゼミで束論を少しやっているのですが，$\wedge$ の反対の $\vee$ もありますか？

答． いま説明している微分形式の文脈では $\vee$ は出てきません．ところで，束論はおもしろいですね．戦後一時期はやったらしいですが，その後すたれていて，最近，計算論理の観点から見直されている分野ですね．キーワードは「ブール代数」ですか．

問． 接束 TN と余接束 T^*N は同じ多様体の構造を入れられると思うのですが．

答． 良い質問ですね．T_xN と T_x^*N が「同じ多様体の構造を持つ」まではいかないのですが，「微分同相になる」のは確かです．というのは，各 $x\in N$ に対し，T_xN と T_x^*N が (ベクトル空間として) 同型だからです．ただし，この同型は自然なものではありません．一般に (有限次元) ベクトル空間 V とその双対ベクトル空間 V^* は同型ですが，(有限次元ベクトル空間は次元が同じならなんでも同型でしたね)，その同型写像は，何か他のデータを使ってはじめて構成されます．V のベクトル空間の構造だけから定めることはできません．たとえば，V の基底を１つ決めたり，V に計量 (内積) を１つ定めたりすると，V と V^* の間の同型写像が構成できるわけです．同様に，T_xN と T_x^*N が「自然に微分同相」ということはできません．たとえば，N に「リーマン計量」というものを定めて，T_xN と T_x^*N との間の微分同相が構成されます．このように微分同相は作れますが，それは計量の選び方に依存するものです．

問． 幾何学でまだ使われていないその他の分野の数学にどんなものがありますか？たとえば応用数学 (確率論や計算可能性など) はどうでしょうか？

答． 確率論も使います．計算可能性も使います．使えるものは何でも使います．幾何学は遍在する (どこにでもある) のです．逆に言えば，幾何学はすべての分野に通じる王道である，とも言えます．ではさようなら．