幾何学３ (多様体入門) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １０ (２００１年１月２９日) の分

問. 余接ベクトル空間 (cotangent vector space) と微分形式 (differential form) の関係は何ですか？

答. 多様体の各点に対し，その点における余接ベクトルを１つ対応させる規則が微分形式です．しかもその対応の仕方が C^∞ 級であるものをこの講義で扱います．ところで，ベクトル場は，多様体の各点に対し，その点における余接ベクトルを１つ対応させる規則でしたね．微分形式とベクトル場とを関連付けて理解するとよいと思います．

問. 余接ベクトルとは接ベクトル空間上の１次関数とのことですが，接ベクトル空間上の関数を考えるとは，どういう意味があるのですか？１次関数 (線形関数) 以外の関数を考えることは意味ないですか？

答. たとえば，接ベクトルの x_1 成分にだけ注目するという操作を考えると，これは，接ベクトル空間上の１次関数を考えていることですね．

問. 余接ベクトルのイメージのとらえ方は，所謂 n 次元超平面のようなものでよいでしょうか？

答. 非常によいと思います．たとえば $\mathbf{R}^n$ の双対ベクトル空間の要素 (余ベクトル，covector) は線形写像 $\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ なので，その「グラフ」で表されますね．グラフは $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1}$ の n 次元部分空間 (超平面) です．この場合，このグラフは第 $n+1$ 成分の軸を含んでいません．逆に，第 $n+1$ 成分の軸を含んでいないような $\mathbf{R}^{n+1}$ の n 次元部分空間は，ある余ベクトルのグラフになります．

問. 余接ベクトルの定義中，h を x_0 の近傍の関数とし，$u \in T_{x_0}N$ に対し，$\dfrac{dh \circ c}{dt}(0) = \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_0)\dfrac{dc_1}{dt}((0) + \cdots \dfrac{\partial h}{\partial x_n}(x_0)\dfrac{dc_n}{dt}((0)$ (以下略) と書かれていましたが，$c(0) = x_0$ の仮定は必要ではないですか？

答. u を定める曲線 c についてですね．もちろんその仮定が必要です．暗黙の了解としました．その他にも暗黙の了解としたことがあります．何でしょうか？(答．h の可微分性，c の可微分性，偏微分 $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$ の定義の仕方などなど．)

問. 同じ余接ベクトルを定めるものがその関数自身以外にないということはありますか？

答. ありません．１つの余接ベクトルに対して，それを定める関数はたくさんあります．たとえば，$N = \mathbf{R}, x_0 = 0$ とすると，$h(x) = x$ と $k(x) = x + x^2$ は 0 で同じ余接ベクトルを定めます．微分学で習ったと思いますが，$\mathbf{R}^n$ 上の C^∞ 関数はテイラー展開できます：$h(x) = h(x_0) + \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)(x_i - (x_0)_i) +$ ２次以上の項．このとき，定数項や２次以上の項が違っても (たとえば２階偏微分係数が違っても) 同じ余接ベクトルを定めます．

問. $\alpha \in T^*_{x_0}N$ が $\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$ と表したとき，$a_i = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)$ となりますか？

答. そうです．x_0 の近傍で定義されたある関数 h があって，$a_i = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}$ となります．実際，たとえば，x_0 を中心とした局所座標に関して，$h = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ をとればよいわけです．

問. 余接ベクトルの変換公式をもう一度説明してください．

答. ある局所座標系に関して，$\alpha = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \cdots + a_ndx_n$ と表され，別の局所座標系に関して，$\alpha = a'_1dx'_1 + a'_2dx'_2 + \cdots + a'_ndx'_n$ と表されたとします．$a_i = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)$ となる関数 h (α の代表) をとります．このとき，$a'_j = \dfrac{\partial h}{\partial x'_j}(x_0)$ です．すると，合成関数の偏微分公式から，$a_i \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial h}{\partial x'_j}(x_0)\dfrac{\partial x'_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{i=1}^n a_j \dfrac{\partial x'_j}{\partial x_i}(x_0)$ です．これが，変換公式です．また，関数 x'_i に対し，定義どおりに，$dx'_i = \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}(x_0)dx_j$ と変形することで，基底の変換公式を直接得ることもできます．

問. 可微分関数 h, k に対して $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)(1 \leq i \leq n) \Leftrightarrow h(x_0) = k(x_0) + c$ ではないですか？

答. 違いますが，質問の意図はわかりました (たぶん)．x_0 の近傍の任意の x について，$\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x) =$

$\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x)(1 \leq i \leq n) \Leftrightarrow h(x) = k(x) + c$ は正しいわけです．でも，講義で扱ったのは，点 x_0 を決めて，そこでの偏微分係数を考えているわけです．誤解のないように．

問． $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x)(1 \leq i \leq n)$ というのは，任意の i ですか？どれか 1 つの i ですか？

答． 任意の i です．

問． $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ と dx_j とわざわざ違う記号を使っている理由は何ですか？

答． 違うものだからです． $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は接ベクトル，dx_j は余接ベクトルです．まったく違う世界に住んでいるものです．

問． dx_j は ∂x_j ではいけませんか？

答． 記号だから勝手に作ってもよいですが，dx_j という記号は多分皆さんが習っているもののうちで最も古くから万国共通 (古今東西，老若男女) に使われている記号です．他の人とコミュニケイトしたいなら，それに従いましょう．

問． なぜ $\langle dx_i, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \delta_{ij}$ なのですか？

答． 注目している点 x_0 を中心とした局所座標系に関して，余接ベクトル dx_i は関数 x_i で代表されます．また，接ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ は曲線 $c(t) = (0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$ (ただし，t は j 番目の成分．つまり，x_j 軸を速度 1 で走る曲線，この場合は直線) で代表されます．すると，$x_i \circ c(t) = \delta_{ij} t$ ですね．したがって，$\langle dx_i, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \dfrac{dx_i \circ c(t)}{dt}(0) = \delta_{ij}$ となります．

問． dx_i という表現は，積分における dx (測度) と関係するのですか？

答． 関係します．でも厳密には，測度というより，微分形式と言った方が正確です．微分形式と測度は関係しますが，厳密に言うと区別します．たとえば，2 変数 xy 平面上で，重積分のときの $dxdy$ は測度であり，$dydx$ と書いても同じものですが，微分形式と考えると，$dx \wedge dy$ と $dy \wedge dx$ は異なります．

問． $V = \mathbf{R}^n$(n 次縦ベクトル全体) の元に対する $\mathbf{R}$ への線形写像は全て横ベクトルの掛け算で表現できるというのは自明でないような気がします．そういえば，線形写像の表現行列とかいうものを習った気がします．やはり裏には何かの定理が潜んでいるのですか？

答． その通りです．自明ではありません．そしてまさに線形写像 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ の表現行列が $1 \times n$ 行列，すなわち n 次横ベクトルになるということです．ところで，揚げ足をとるようで悪いですが，裏に潜んでいるものを白日のもとに明らかにしたのが定理だとおもいます．潜んでいるうちは定理じゃないですよね．でも，思い出しましたが，有名な彫刻家のミケランジェロは，これから掘る原石の中に，すでに完成された彫刻を見ていて，私はただそれを取り出すだけである，といったようなことを書いていた記憶があります．そういう意味では正しい表現なのかも知れません．

問． ベクトル空間 V について，$(V^*)^* = V$ は成り立ちますか？$T_x^{**}N$ と T_xN は同型ですか？

答． 同型です．しかも，「自然に同型」です．ただし，V は有限次元とします．ところで，等号が使えるのは，同じ土俵に載っているものに対してだけなので，$(V^*)^* = V$ と書くのは良くないですね．あくまで，$(V^*)^* \cong V$ と書くべきでしょうね．

問． $u \in V, \alpha \in V^*$ で，$\alpha(u) = \langle \alpha, u\rangle$ とも書くのは内積っぽいからですか？$\langle u, \alpha\rangle$ と書くことは意味がありますか？

答． $(V^*)^* \cong V$ なので，V と V^* は対等な立場にあります．双対 (dual) というのは「双子」という意味です．ですから，$\langle u, \alpha\rangle$ と書いても大丈夫です．私 (石川) は双対空間の話をするときは，たとえ話として，東大寺三月堂の「日光・月光 (にっこう・がっこう) 菩薩」をよく持ち出します．似ているけれど良く見ると違っています．そして，平等な役割を果たしていますね．

問． V の基底 $u_1, \ldots, u_n$ に対し，V^* の双対基底 $u_1^*, \ldots, u_n^*$ は必ず存在するのでしょうか？また，なぜ， $u_1^*, \ldots, u_n^*$ は V^* の基底になるのですか？

答． 必ず存在して基底です.「線形写像 $V \to \mathbf{R}$ は V の基底のベクトルに対する値によって一意的に決まる．しかも，基底のベクトルに対する値は任意に与えることができる」ということを思い出しましょう．

そういう意味では，$u_i^*(u_j) = \delta_{ij}, 1 \leq j \leq n$ は u_i の定義であると言えます．必ず存在します．それらが 1 次独立であり，V^* を生成することも証明できます．たとえば，石川他著「線形代数と固有値」共立出版の pp.49–50 を見てください．

問． 講義の例で「x_0 の近傍では $dh = 0 \cdot dx_1 + \dfrac{-x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2$」という部分は，$x_0$ のまわりの局所座標系を決めたときの開集合 U の任意の点 x に対して $dh(x) = 0 \cdot dx_1(x) + \dfrac{-x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2(x) \in T_x^* N$ ということですか？

答． まったくその通りです．よく気がつきましたね．頼もしい限りです．

問． 余接ベクトル空間に対しても，外積のようなものを考えますか？

答． 考えます．2 次以上の微分形式を考えるときに外積は不可欠です．歴史的に言うと，そのために代数的な外積という概念が生まれたと言えます．

問． 余接ベクトル空間を考えるのはなぜですか？L^p 空間のときも双対空間を考えたのですが，そちらのようなものですか？

答． 山にのぼるのは，そこに山があるから，余接ベクトル空間を考えるのも，そこに，ほら，あるからです．皆さんには見えませんか？それはともかく，双対ベクトル空間を考えることは，数学では日常茶飯事です．ところで，関数解析などの分野でも双対ベクトル空間は重要です．所謂「シュワルツの超関数」は双対ベクトル空間の考え方をもとに理論が構成されています．ただし，無限次元ベクトル空間の双対なので，双対性 $V^{**} \cong V$ が成り立ちません．双対性がないのに，つまり，双子でないのに，双対空間とよぶのは不自然な用語ですが，双対と呼ぶのが慣習 (因習?) になっているようですね．

問． 接ベクトルの場合は "測度" と単純だったのですが，余接ベクトルは何を導く際に使う概念なのですか？

答． 「測度」ではなく「速度」です！Speed です！余接ベクトルの方が「測度」ですね．(厳密にはいわゆる測度とも区別すべきですが.）余ベクトルというのは，結局，ベクトルの各成分をそれぞれ何倍かして加えるという操作のことですから,「ベクトルを評価するものさし」が余ベクトルであると言って良いと思います．

問． x_0 の近傍の関数とはどういうものですか？

答． x_0 のある近傍の上で定義された (この講義の場合は C^∞ 級の) 関数のことです．

問． X を多様体 N 上の可微分ベクトル場，$a, b \in N$ とするとき,「$a \sim b \Leftrightarrow a$ を通る X の積分曲線で，b を通るものがある」と定義すると，$\sim$ は同値関係になりますか？反射律とか対称律は大丈夫だと思いますが，推移律は成立しますか？

答． よい視点ですね．同値関係になります．推移律も，積分曲線の一意性から証明できます．try してみてください．

問． この講義は代数幾何学の分野も入っていますか？「演算」や「群」といった用語が幾何学の講義に出てきたりするので，ふっとそう思いました．

答． 幾何学で代数学や解析学やその他のものを使うのは当たり前です．幾何学の講義で基本群やホモロジー群がすでに出てきているはずです．微分積分，ベクトル解析も大いに使っているはずです．**使えるものは何でも使う，これが学問の正しいやり方です**．もちろん，代数学でも幾何学や解析学を使うし，解析学でも幾何学や代数学を使います．最近はとくにどんどん使います．使わないのは良くない (つまらない) 数学であるとも言えます．それはともかく,「代数幾何学」というのは，古典的な意味のいわゆる「解析幾何学」の発展したもの，あるいは，幾何学の観点から代数を研究する分野を指し，とくに「代数多様体」を研究します．そういう意味では関係ないとは言えませんが，この講義では，代数幾何学に限らず，どんなことを研究する際にも必要になる最低限の幾何学的素養を伝授するのが目的です．ではまた．