幾何学３質問の回答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. １ (２０００年１０月２日) の分

問． 球面が１つの関数のグラフとして表されないのはなぜですか？

答． 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ は１つの関数 $f(x,y)$ を使って，$z=f(x,y)$ とは表すことができない，ということですが，これは，(x,y) を決めても，z が１通りには定まらないことからわかります．実際，$(x,y)=(0,0)$ について，$z^2=1$ をみたす z は $z=\pm 1$ の２つありますね．このように関数 (１価関数) のグラフとしては表すことは不可能です．

問． 球面の曲座標表示 $x=\sin\varphi\cos\theta, y=\sin\varphi\sin\theta, z=\cos\varphi$ の説明の部分で，長方形 $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ を考え，その長方形をまるめて円柱を作るところまではわかったのですが，それを１点につぶして，地球の北極と南極にあたるところに対応させるというのはどういうことを意味しているのでしょうか？

答． 式を調べてみればすぐにわかります．$\varphi=0,\pi$ の場合，$\sin\varphi=0, \cos\varphi=\pm 1$ ですね．したがって，θ の値に関わらず，$\varphi=0$ のときは，$(x,y,z)=(0,0,1)$, $\varphi=\pi$ のときは，$(x,y,z)=(0,0,-1)$ となりますね．

問． 球面を１つの座標系で表すのは無理，とはどういうことですか？$x^2+y^2+z^2=1$ と表したならば，それは (x,y,z) という１つの座標系で表されたことになるのではないでしょうか？

答． １つの座標系で表すという意味は，この場合，平面の開集合との間の同相写像が存在するということです．もし，同相写像があれば，それを用いて，球面の点を，平面上の座標を使って，もれなく重複なく表すことができるわけです．でもそれは不可能です．球面と 平面の開集合が同相ではありえないことは，球面がコンパクトなのに，(空集合ではない) 平面の開集合がコンパクトではないことからわかりますね．地球を１枚の地図に表すには，どこかを切り裂く必要がありますね．それは，球面と平面が同相ではないからです．

問． 球面の極座標表示では，図形をうまく表しきれていない，ということは，球面が２次元空間 ($\mathbf{R}^2$) と同相ではない，ということでしょうか？

答． うまく表しきれていないということは，上のように式を調べればわかります．そして，その背景に，球面と $\mathbf{R}^2$ が同相ではないという事実が潜んでいる，ということでしょう．

問． 「次元」の意味がわかりません．空間の曲面はなぜ「２次元」多様体なのですか？平面は２次元で，空間は３次元だと思うのですが．

答． 曲面は確かに３次元空間の中にありますが，あくまでその一部分であって，曲面上の点は，曲面上に拘束されているので，動くことのできる自由度は 2 であり，平面と同じですね．詳しくは，$\mathbf{R}^n$ と局所的に同相な空間を n **次元**であると言います．

問． 「局所座標系」というのがわかりませんでした．

答． 多様体として扱いたい空間 (図形) の点のある近傍から，$\mathbf{R}^n$ の開集合への同相写像を**局所座標系**と呼びます．というのは，そのような同相写像があれば，考えている図形 (の一部分) は，$\mathbf{R}^n$ の点と対応付けられているので，n 個の座標であらわすことができるからです．局所座標系は (あるとすれば) 沢山あります．なお，**可微分多様体**を考える場合には，局所座標系の選びかたは少し慎重にする必要があります．

問． 多様体の定義で,「局所座標系どうしの変換が微分可能」とありましたが,「変換」という概念がよく理解できません．

答． 「座標変換」という言葉を聞いたことはありませんか？これからの講義で詳しく説明していきます．

問． 変換式を微分したものは一体どんな意味があるのですか？

答． 局所座標系どうしの「貼り合わせ具合」を表します．この質問に関するキーワードは,「ヤコビ行列」です．ヤコビ行列は (偏) 微分によって定義されますね．

問． 多様体でないようなものはどんなものか教えてください．

答． たとえば，$\mathbf{R}^2$ の $xy=0$ で定まる図形 (+ の字) は多様体にはなり得ません．というのは，交差点のところでは，そのどんな近傍も，$\mathbf{R}^n$ のどんな開集合とも同相でないからです．

問． 線分は多様体に入るのでしょうか？

答． 端点を除くと，１次元多様体です．端点を含めると，“境界付き”１次元多様体です．

問． 多面体は多様体に含まれるのでしょうか？

答． うむ.「部分多様体」という概念があり，この質問の意図は，そのことと関連していると思われます.「多様体である」というより,「多様体になるかならないか，局所座標系をきめて，多様体の構造が入れられるかどうか」と問うことができます．たとえば正多面体は球面と同相なので，可微分多様体の構造を入れることができます.「多様体の構造」に関しては，講義で詳しく説明します．

問． ★ 多様体の定義にある近傍や開集合はどのようにとればよいのですか？「局所的に」という語句は非常に曖昧であると思います．

答． 曖昧ではありません.「しかじかの条件をみたす近傍が存在する」という意味で確定しています．その条件をみたす近傍であれば，どれを選んでも理論が通用します．

問． ★ 多様体の定義に現れる $\mathbf{R}^n$ の次元は一定ですか？

答． その通りです．それを強調するのを忘れましたが，n は一定としています．

問． 多様体の次元とは，局所的に同相な $\mathbf{R}^n$ の n ですか？

答． そのとおりです．

問． いろいろな場合で出てくる多様体に統一的な定義があるのでしょうか？

答． 多様体とよばれるものは，これから講義で詳しく説明する「 manifold 」と，詳しく説明しませんが，特異点も許した 「variety 」と呼ばれるものがあります．manifold に関して言えば，統一的な定義があります．それを説明します．もちろん，細かい部分で目的に応じていろいろな変種がありますが，定義の仕方自体はみな同じです．

問． 今日の講義では，多様体の表面 (?) についてだけ考えたようですが，多様体の内部については考えないのですか？

答． 多様体の表面というより，球体の表面である球面だけを考えたということですね．数学では何を考えても自由なので，もちろん，球体も考えるし，球の内部 (開球) も考えられます．その場合，球体は「３次元境界つき多様体」開球は「３次元多様体」です．

問． 多様体の定義にはどのような概念を準備する必要がありますか？位相空間の他に，例えば線形代数の理論や，群論が必要になってくるのでしょうか？

答． 多様体を定義するだけなら，位相空間と偏微分だけで足ります．さらに多様体を十分理解するには「接ベクトル」の概念が重要ですが，それには，線形代数を使います．あと知っておいた方がよいのは，外積ぐらいです．群論はこの講義では使いません．結局あまり予備知識は要らないということになります．予備知識より，想像力と好奇心のほうが大切です．

問． 位相空間を知らなくても多様体を考えることはできますか？

答． もちろん何でも考えることはできますが，確実な知識や方法を身に付けたいと思ったら，位相空間のことも必要に応じて勉強しなおすことをお薦めします．

問． この講義を受けるのに何か他の知識が必要ですか？序論は関係ないですか？幾何学１，２などをとってからの方がよいのでしょうか？

答． 序論は大いに関係します．とくに序論２ (ユークリッド空間の位相)，序論３ (ベクトル空間と線形写像の理論)，序論１１ (集合と位相) の知識は必須です．また幾何学１，２のうち，とくに幾何学１ (曲線論, 曲面論) は受講してからの方が理解しやすいでしょう．それらの知識がまったく無くて，多様体を理解しようとするのは，いささか無謀でしょう．数学科での講義内容のパンフレットをよく読んで，系統だった勉強をすることをお薦めします．もちろん，無謀なことをするのは若者の特権ですが...

問． 多様体は難しいというより，手間がかかりそう，と感じますが，扱い易くする手段があるのでしょうか？

答． 「手間をかけることができる」から良いと言えます．つまり，手間をかけないでわかるようなことは簡単なことで，方法を学ばなくても誰にでもできることです．多様体は，素手で立ち向かえるような相手ではないが，方法にしたがって手間をかけさえすれば理解できます．そういう意味で，多様体論は「多様体を扱い易くする手段そのもの」であると言えます．

問． 多様体を距離空間で扱う場合はあるのでしょうか？

答． 多様体の定義では，距離は関係ありません．しかし，多様体に計量 (リーマン計量) と呼ばれるものを導入すれば距離空間と考えられます．このことは，多様体論のもう少し進んだ教程で学ぶと思います．

問． ★ n 次元多様体がハウスドルフ位相空間ならば，n 次元位相多様体ですか？n 次元位相多様体の定義は，確か「ハウスドルフ位相空間で，各点の近傍が $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相」というような内容だったと思います．

答． 鋭いですね．これからの講義で，改めて可微分多様体の詳しい定義をしますが，ハウスドルフ性を条件に入れます．したがって，n 次元可微分多様体は n 次元位相多様体です．

問． 「多様体の上での微分積分学」とありましたが，どのようなことがわかり，どのようなメリットがあるのでしょうか？今までに習ったようなユークリッド空間などにおける関数の微分積分学と同じような感覚なのでしょうか？

答． 多様体の構造がわかります．「モース理論」というものがありますが，これは多様体上の微分学の典型例です．また，７次元球面 S^7 や $\mathbf{R}^4$ に複数の微分構造が存在することが知られていますが，このようなことは，多様体の上での微分積分学を使って証明される事柄です．

問． 多様体の上で微分積分学をやりたい，とのことですが，そうすると「微分」「積分」の定義はどうなるのですか？

答． なるほど．そこが問題ですね．局所座標系を使って，$\mathbf{R}^n$ と思って微分したり積分したりします．そのために局所座標系をとるのです．

問． 多様体に関するわかりやすい参考書があれば教えてください．

答． シラバスに書いてあります．