愛ではじまる微積分 (２００３年度前期：数学概論 A)

担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお，北海道大学理学研究科助教授)

目次

授業の目標

複素数 "i" を使った微積分の立場から，既習の微積分をもう一度見直し，現代数学の基礎と応用を概観する．なお，題名の「愛」は，言うまでもなく複素数 "i" (アイ) にかけた駄洒落だが，ややもすると無味乾燥に見えてしまう微積分が，複素数 "i" を使うことによって見通しが良くなり面白く感じられ，学生諸氏が少しでも数学を好きになってくれれば良いな，という願いもこめたネーミングである．

数理のこころを知りたいならば，愛で始めよ微積分

到達目標

既習の微積分学が復習でき，同時に，複素関数論とフーリエ級数の基本がマスターできる．一石二鳥．それが可能なように教材を精選している．

評価の基準と方法：レポートと出席回数により絶対評価する．

備考

教科書は指定しない．あらかじめ講義内容のプリントを配付する．プリントを見ながら受講すれば，必ず良く分かるようにできている．念のため，参考書として，志賀浩二著「複素数３０講」朝倉書店．(ISBN4-254-11481-8) を挙げておく．

１．"i" と複素数

1.1 複素数

実数２つの組を考える．

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(左辺の意味が右辺).

$c(x.y) := (cx, cy)$.

'積'

$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$.

(内積ではない)．とくに,

$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$

$(0, y_1)(0, y_2) = (-y_1y_2, 0)$

とくに,

$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$.

この積は，通常の数のかけ算と同様な性質を持つ．分配法則，結合法則，etc...

このように積を定めるとき,

(x, y) のことを $x + yi$ と書く．

この形の数を**複素数** (ふくそすう) とよぶ．

$(0, 1)$ のことを i と書く．i を**虚数単位**と呼ぶ．

複素数の積：

$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$

である．

$i^2 = -1$ が成り立つ．$(-i)^2 = -1$ も成り立つ．

複素数のかけ算は，分配法則と $i^2 = -1$ を使えば容易に実行できる．

記号：$x + yi$ を $x + iy$ とも書く．

$z = x + yi$ とまとめておくことが多い．

このとき，x を複素数 z の**実部** (じつぶ)，y を**虚部** (きょぶ) と呼ぶ．

例：$z = x + yi$ について,

$z^2 = (x + yi)^2 = (x + yi)(x + yi) = x^2 + x(yi) + (yi)x + (yi)(yi) = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$

実部 $x^2 - y^2$, 虚部 $2xy$.

$x = 0$ のとき，$0 + yi = yi$ である．

$y = 0$ のとき，$x + 0i = x$ である．

「複素数 z が実数 $\Leftrightarrow$ z の虚部が 0」が成立.

$z = x + yi$ に対し，虚部の符号を変えて得られる複素数を z の**複素共役** (ふくそきょうやく) と言い，$\overline{z}$ で表す.

$z = x + yi$ のとき，$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi.$

「複素数 z が実数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$」が成立.

さて，$z = x + yi$ に対し，$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = (x^2 + y^2) + (x(-y) + xy)i = x^2 + y^2$ が成り立つ.

$z = x + yi$ に対し，$z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2$.

演習問題１． $\overline{z}z = x^2 + y^2$ を確かめよ.

$x^2 + y^2 \geqq 0$ である．0 になるのは，$x = 0$ かつ $y = 0$ のときしかない.

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. と定め，z の**絶対値** (あるいは，**長さ**，**ノルム**) と呼ぶ.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$|zw| = |z||w|$.

演習問題 ２． 複素数 $z = x + yi, w = u + vi$ について，$(zw)(\overline{zw}) = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$ を示せ.

1.2 複素数の商.

$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i = 1$

とおいてみる．実部と虚部を比べて,

$x_1x_2 - y_1y_2 = 1, x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ が導かれる.

$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{x_1^2 + y_1^2} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{x_1^2+y_1^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$

したがって，$\dfrac{1}{x_1+y_1 i} = \dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2} - \dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}i$ と求められる．あるいは，$z=x+yi$ のとき，

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

と考えるとよい．

演習問題 3． $\dfrac{1}{1+i}$ を計算せよ．$\dfrac{1}{1-i}$ を計算せよ．

1.3 2次方程式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ の解法を思い出す．

$a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c=0$

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}=0$

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2}{4a}-c=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

解法をよく観察すると，$x+\dfrac{b}{2a}=z, \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=h$ とおくと，結局 $z^2=h$ を解いているだけのこと．

もし，$h>0$ ならば実数の範囲で解くことができる．

演習問題4． 方程式 $x^2+x+1=0$ を上のような解法を用いて解け．

---

2. **複素多項式**

例：$z^2, 1-z^2, 1+z+z^2, z^3-1, \ldots.$

一般形：

$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n, (a_n\neq 0)$ (n 次式)，

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ は複素数．

z も複素数．例:$(z-1)(z^2+z+1)=z^3+z^2+z-z^2-z-1=z^3-1$ が成立．同じことだが，$(1-z)(1+z+z^2)=1-z^3$.

> **定理** (代数学の基本定理) n 次方程式 $f(z)=0$ は重複をこめて (複素数の範囲で)n 個の解を持つ．

---

3. **複素数平面**

3.1 複素数平面

複素数 $z=x+yi \leftrightarrow (x,y)$ 平面の点．

従って，複素数を平面の点で表現するとわかりやすい．(複素数平面，ガウス (Gauss) 平面)．

演習問題5． z が半径 1 の円周上を１周するとき，z^2 は平面上をどう動くか調べよ．また，z が半径 2 の円周上を１周するときはどうか？z が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上を１周するときはどうか？

3.2 極座標

$z=x+yi$ について，

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

とおく．すると，$z=r\cos\theta+(r\sin\theta)i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を得る．いま，

> $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ **オイラー** (Euler) **の公式**

と書くと，$z=re^{i\theta}$. また，$r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$. すなわち，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.\quad r=|z|.$$

を得る．

演習問題6． $|z|<r$ で表される複素数平面の領域を図示せよ．

演習問題7． 点 z が，円周 $|z|=r(>1)$ を動くとき，$w=z+\dfrac{1}{z}$ が楕円 (だえん) を描くことを確かめよ．

---

4. **べき級数**

4.1 べき級数

$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ (無限に続く．係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ は具体的に与えておく．)

例 (等比級数)：$1+z+z^2+z^3+\ldots$ はどのような複素数を表すか？

$(1-z)(1+z+z^2)=1-z^3$ だから，

$1+z+z^2=\dfrac{1-z^3}{1-z}.$

同様に，$1+z+z^2+z^3=\dfrac{1-z^4}{1-z}.$

$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}.$

演習問題8． $(1-z)(1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n)=1-z^{n+1}$ を示せ．

さて，$|z|<1$ とする．z^{n+1} は，n をどんどん大きくしていくと，$|z^{n+1}|=(|z|)^{n+1}$ はどんどん 0 に近付いていく．したがって，z^{n+1} は 0 に収束していく．従って，

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+\cdots=\frac{1}{1-z}.\quad (|z|<1).$$

注：上の等式を $z=-1$ についてあてはめてみると，

$1-1+1-1+1-1+\cdots=\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$ (!?)

$z=i$ を代入してみると，

$1+i-1-i+1+i-1-i+\cdots=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i}{2}$ (!?)

などといった興味深い (!?) 等式が得られるが，そのままでは正当化されない．$|z|=1$ の場合は，取り扱い注意である．

4.2 無限級数
一般に無限和 $b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\cdots$ を考える．(z に具体的な数値を代入したときの $a_n z^n$ を b_n とおくとよい)．
無限和の取り扱い方は,「部分和の極限をとれ」：
$s_n := b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\cdots+b_n$ とおき，$\lim_{n\to\infty} s_n$ を考える．

例：$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\cdots$.
この場合，$b_0=1, b_1=-\frac{1}{3}, b_2=\frac{1}{5}, b_3=-\frac{1}{7},\dots,b_n=(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.
$s_{2m+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{4m+1}-\frac{1}{4m+3}$,
$s_{2(m+1)+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{4m+1}-\frac{1}{4m+3}+\frac{1}{4m+5}-\frac{1}{4m+7}\geq s_{2m+1}$,
$s_{2m+1}\leq 1$．単調増加，上に有界．$\exists\alpha$, $s_{2m+1}\to\alpha$.

単調増加で上に有界な数列は極限値を持つ．

$s_{2m}=s_{2m+1}+\frac{1}{4m+1}\to\alpha(m\to\infty)$．(交代級数の和，ライプニッツ (Leibniz) の定理)．

---

5. **指数関数**

5.1 数 e
無限級数

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

は収束するので，その和を e と書く．このとき，次が成り立つ．

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

演習問題９． このことを (1 年生のとき使った教科書を調べて) 確認せよ．
数 e を上の極限値として定義しても，べき級数の和として定義しても同じこと．

部分和 $s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ について，
$e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\dots$
$<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\right\}=\frac{1}{n!n}$．したがって，

$0<e-s_n<\frac{1}{n!n}.$

を得る．このことから，次がわかる：

e は無理数である．

実際，仮に e が有理数とすると，$e=\frac{p}{q}(p,q$ は正の整数) と書ける．一方，$0<e-s_q<\frac{1}{q!q}$ なので，$0<q!e-q!s_q<\frac{1}{q}$ だが，仮定から $q!e=(q-1)!p$ は整数．$q!s_q=q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$ も整数．したがって，$q!e-q!s_q$ も整数．ところが，$q\geq 1$ なので，整数が 0 と 1 の間にあることになり，矛盾である．

5.2 指数関数
一般に，

$$e^z:=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\dots$$

(無限べき級数) と定義する．e^z (e の z 乗) は，$\exp(z)$ とも書く．$a_0=1, a_1=\frac{1}{1!}=1, a_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}, a_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}, a_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120},\dots$.

定理 任意の複素数 z に対し，無限級数 $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$ は収束する．

実際，各複素数 z を固定し，

$$E(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

を考え，$c_n=\frac{z^n}{n!}$ とおくと，$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{|z|}{n+1}\to 0$ $(n\to\infty)$ がわかるので，次の定理から $E(z)$ は収束する：

級数 $\sum c_n$ は，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1$ ならば収束．
級数 $\sum c_n$ は，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|>1$ ならば収束しない．

5.3 指数関数の性質

$e^0=1$, $e^1=e$, $e^{z+w}=e^ze^w$ (指数法則)．

$\overline{(e^z)}=e^{\overline{z}}$, $\quad\overline{(e^{i\theta})}=e^{\overline{i\theta}}=e^{-i\theta}$

$e^ze^{-z}=e^0=1$ なので，すべての複素数 z に対し，$e^z\neq 0$.

$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1.$
複素数 a について $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{ah}-1}{h}=a.$

演習問題１０． 5.2 の e^z の式を使って，上のことを示せ.

複素数 a，実数 t について，$\dfrac{d}{dt}e^{at}=ae^{at}.$

演習問題１１． e^{at} を級数展開し，"項別に微分" をすることにより，上のことを導け.

5.4 微分方程式
a を複素数とする．複素数値関数 $y=y(t)$ について，微分方程式 $\dfrac{d}{dt}y(t)=ay(t)$ を考える．(とりあえず，t は実数上を動くとする).

微分方程式 $\dfrac{d}{dt}y(t)=ay(t)$ について，
与えられた 2 つの複素数 y_0 に対し，$y(0)=y_0$ となるような解 $y(t)$ がただ一つ存在する.

微分方程式 $\dfrac{d}{dt}y(t)=ay(t)$ の $y(0)=1$ となる解は $y(t)=e^{at}$.

演習問題１２． 級数の形で表される関数 $y(t)=y_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots+c_nt^n+\cdots$ について，方程式 $\dfrac{d}{dt}y(t)=ay(t)$ から，$1,t,t^2,t^3,\ldots$ の項の係数を比較することにより，$c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n,\ldots$ を与えられた定数 y_0,a の式で表せ.

６．オイラー (Euler) の公式
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ で $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を定義することができる．(従来の $\sin,\cos$ と同じものになるが，従来のものは一旦忘れる)．つまり，

$\cos t:=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin t:=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

と改めて定義する.
$e^{it}=1+\dfrac{it}{1!}+\dfrac{(it)^2}{2!}+\dfrac{(it)^3}{3!}+\dfrac{(it)^4}{4!}+\dfrac{(it)^5}{5!}\dfrac{(it)^5}{5!}+\cdots$
の実部と虚部を見ると，

$\cos t=1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\cdots,$
$\sin t=\dfrac{t}{1!}-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!}-\cdots.$

がわかる．($\cos t$ は偶数次の交代和，$\sin t$ は奇数次の交代和).
t が実数のとき，$\cos t,\sin t$ は実数である.
$|e^{it}|^2=e^{it}\overline{e^{it}}=e^{it}e^{-it}=1.$
よって，$|e^{it}|=1$ がわかる．したがって，

$\cos^2t+\sin^2t=1$，$0\leqq\cos t\leqq 1, 0\leqq\sin t\leqq 1.$

$\cos 0=1,\sin 0=0.$
$\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1.$
$\dfrac{d}{dt}\cos t=-\sin t,\ \dfrac{d}{dt}\sin t=\cos t.$

演習問題１３． これを示せ.
さらに，次のことが証明できる：

$\cos t_0=0$ となる正の実数 t_0 が存在する.

実際，仮に，このような t_0 がなかったとすると，$t>0$ のとき，$\cos t>0$ となる．すると，$\dfrac{d}{dt}\sin t=\cos t>0$ である．したがって，$\sin t$ は単調増加関数である．$\sin 0=0$ なので，$t>0$ のとき，$\sin t>0$. $0<t<s$ のとき，$(\sin t)(s-t)<\int_t^s\sin x dx=\cos t-\cos s\leqq 1$. $\sin t>0$ であり，s が任意に大きくとれるので，これは矛盾である.

$\cos t_0=0$ となる正の実数 t_0 のうち最小の数をとり，その 2 倍を π と書き，**円周率**とよぶ.

このとき，$\cos\dfrac{\pi}{2}=0,\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，がわかり，
$e^{\frac{\pi i}{2}}=i$, がわかる．したがって，
$e^{\pi i}=\left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^2=i^2=-1$ を得る：

$e^{i\pi}=-1$ (**オイラーの公式**).

($e^{\pi i}z=-z$ いっぱい愛情をかけるとマイナスになる...)
また，$e^{z+2\pi i}=e^z$ (周期性) もわかる.

こぼれ話：e と π は，どちらが基本的な数か？

７．円周率再論
7.1 円周率の歴史
π はオイラーが 1737 年に使い始めた記号．しかし，円周率の歴史はもっと長い．半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$，面積は πr^2．円周率は「円積率」とも認識された．$\pi\fallingdotseq 3$ (バビロニア B.C. 2000 年頃，旧約聖書にもある)．$\pi\fallingdotseq\left(\dfrac{16}{9}\right)^2\fallingdotseq 3.16\ldots$ (エジプト B.C. 1800 年頃)．$3\dfrac{10}{71}<\pi<3\dfrac{1}{7},\pi\fallingdotseq 3.14$ (アルキメデス B.C. 200 年代)．$\pi\fallingdotseq\dfrac{355}{113}=3.1415929\ldots$ (中国，宗時代，A.D.5 世紀).

7.2 円周率の計算.
３角関数 $y=\cos x, y=\sin x, y=\tan x$ の逆関数を $\mathrm{Arccos}(x), \mathrm{Arcsin}(x), \mathrm{Arctan}(x)$ と書く．(**逆三角関数**，x を y の関数と考え，その後，x, y を入れ替えたもの)
$-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Arctan}(x) < \dfrac{\pi}{2}$ に注意.
$\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,\ \dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$
$\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

したがって，逆関数の微分を考えて次を得る：

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots (-1 < x < 1)$ なので，この両辺を項別に積分すると，次がわかる：

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, (-1 < x < 1).$$

演習問題１４． このことを確かめよ.
上の等式は $x=1$ でも成立する．$\tan(\dfrac{\pi}{4}) = 1$ なので，$\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$. したがって，

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \text{ (グレゴリーの公式)}$$

この公式の右辺は収束はするが，収束の仕方がかなり遅いので，次の式を使って円周率を計算する：
$\tan(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ だから，$\mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{\pi}{6}$. したがって，
$\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^3 + \dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^5 - \dfrac{1}{7}(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^7 \cdots$
したがって，次の式を得る：

$$\pi = 2\sqrt{3}(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots).$$

演習問題１５． π の近似値を，上の級数により電卓 (それに類するもの) を使って，(あるいは手計算で)，求めてみよ．($\sqrt{3} = 1.7320508...$ 人並みにおごれや...)

参考：$\dfrac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{239}$ (マチンの公式)
を使うと，もっと簡単に (速く) 近似値が計算できる．また．アルキメデスは $\dfrac{265}{153} < \sqrt{3} < \dfrac{1351}{780}$ も示している.
(この小節は，小林昭七著「円の数学」裳華房，を参照).

８．三角関数再論

ところで，指数法則 $e^z e^w = e^{z+w}$ (3.5) から
$e^{ix}e^{iy} = e^{ix+iy}$ が成り立つ.
$(\cos x + i\sin x)(\cos y + \sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$
の両辺の実部と虚部を比べると

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\sin(x+y) = \cos x\sin y + \sin x\cos y.$$
(**加法定理**)

を得る.

演習問題１６． $e^{i2\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ と $(e^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$ を使って，２倍角の公式を導け.
演習問題１７． $\sin 2\theta\cos\theta$ と $\cos 2\theta\sin\theta$ を計算せよ.
演習問題１８． $e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$ と $(e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ を使って，３倍角の公式を導け.

複素数 z に対しても，$\cos z := \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，$\sin z := \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$，

と定義する．$\cos z, \sin z$ はすべての複素数 z に対して定まる.
$e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}e^{2\pi i} = e^{iz}$ なので，

$$\cos(z+2\pi) = \cos z,\ \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

また．$e^{i(z+w)} = e^{iz}e^{iw}$ なので，

複素数 z, w に対して，
$\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$
$\sin(z+w) = \cos z\sin w + \sin z\cos w.$

がわかる.

演習問題１９． $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ を使って，複素数 z に対しても，$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ が成り立つことを示せ.

９．収束半径

9.1 収束半径
いろいろな「べき級数」が出てくるので，収束するような z の範囲と，その「べき級数」が定める関数がどういう性質を持つか，微分，積分の計算はどうしたらよいかを調べるとよい.
$f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$
に対し，その**収束半径**を

$R := \sup\{|z_0| \mid f(z)$ は $z = z_0$で収束する $\}$

で定義する．sup は上限.
例：$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ の収束半径は 1. 実際，収束する範囲は，$|z_0| < 1$ なので，$R = \sup[0,1) = 1$. $|z_0| = 1$ のときは収束しないかもしれないが，$|z_0|$ が 1 よりちょっとでも小さいと収束するので，上限は 1 になる.

べき級数 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$ の収束半径 R について，
$|z_0| < R$ ならば $f(z)$ は $z = z_0$ で収束.
$R < |z_0|$ ならば $f(z)$ は $z = z_0$ で収束しない.

$f(z)$ が $z=z_0$ で**絶対収束**するとは，$|a_0|+|a_1z|+|a_2z^2|+|a_3z^3|+|a_4z^4|+\cdots$ が収束.

$f(z)$ が $z=z_0$ で絶対収束 $\Rightarrow$ $z=z_0$ で収束.

収束半径 R について，
$|z_0|<R$ ならば $f(z)$ は $z=z_0$ で絶対収束.

9.2 収束半径の計算法

べき級数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$ の収束半径 R の計算法.
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が確定すれば，

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定すれば，

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

一般に，
コーシー・アダマール (Cauchy-Hadamard) **の定理**：

$$R=\frac{1}{\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geq N}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

注：たとえば，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ の場合は，$R=\infty$ と書き，ガウス平面全体で収束することを意味する.

9.3 複素解析的関数
べき級数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$ の収束半径が R で，$|z_0|<R$ のとき，z_0 を中心とした十分小さな円盤上で $f(z)$ は一様収束する.
ここで，**一様収束**とは一様に収束すること.
正確な定義：一様に収束するとは，収束の仕方が一様ということ．つまり，任意の $\varepsilon>0$ に対し，番号 n があって，n 以上の番号 m と，その円盤上の z における部分和 $f_m(z)$ に対し，$|f_m(z)-f(z)|<\varepsilon$ が成り立つこと.
$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$ の収束半径が R であるとき，$|z|<R$ の範囲で，z に関して何度でも微分可能である．(10 節参照).

関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で**複素解析的** (complex analytic) あるいは**正則** (holomorphic) とは，$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$ という具合に，$z-z_0$ に関するべき級数で ($z=z_0$ の近傍で) 表されるときにいう.
$z_0=0$ の場合を主に扱うが，z の代わりに $z-z_0$ について考えれば，一般の z_0 に関しても同様である.

$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$ の収束半径が R のとき，$f(z)$ は，$|z|<R$ の範囲で複素解析的である．そして，z に関して何度でも微分可能である.

例：$\frac{1}{1-z}$ は $|z|<1$ の範囲で，複素解析的である.
例：$e^z,\cos z,\sin z$ は，全複素数平面上で複素解析的である.

9.4 整関数
ガウス平面全体の上で複素解析的な関数 (正則な関数) を**整関数** (entire function) とよぶ．整関数は，収束半径が ∞ であるようなベキ級数で表される.

整関数 $g(z)$ が有界ならば，$f(z)$ は定数である．(リュービル (Liouville) の定理).

Liouville の定理を応用して，代数学の基本定理を証明する.
$f(z)$ を n 次多項式とする．どんな複素数 z に対しても $f(z)\neq 0$ であるとして矛盾を導こう (背理法)．$g(z):=\frac{1}{f(z)}$ とおくと，$f(z)$ が零にならないので，$g(z)$ はガウス平面全体で正則である．すなわち，整関数である．また，$|z|\to\infty$ のとき，$|f(z)|\to\infty$ なので，$|g(z)|=\frac{1}{|f(z)|}\to 0$ であり，$g(z)$ は有界である．リュービルの定理から，$g(z)$ は定数．したがって，$f(z)=\frac{1}{g(z)}$ は定数である．これは矛盾である．よって，$f(z)=0$ となるような複素数 z が存在する.

１０．項別微分
10.1 複素微分
複素関数 $f(z)$ に対し，$\frac{df(z)}{dz}:=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ で，$f(z)$ の z に関する微分 (導関数) を定義する．ここで，定義の右辺は，各複素数 z を固定し，その上で，h をガウス平面上で 0 に近づけたときの極限である.

定数の微分は 0，z の微分は 1，z^2 の微分は $2z$，z^n の微分は nz^{n-1}．複素多項式の微分も容易.
演習問題２０． $\frac{dz^n}{dz}=nz^{n-1}$ を定義に従って (2 項定理を用いて) 確かめよ.
注：複素関数に関しても，
$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2}$ が成立.

10.2 項別微分
そこで，べき級数の場合も，項ごとに微分できれば簡単.
実際，それは正しい：

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$.
の収束半径と $a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + na_n z^{n-1} + \cdots$
の収束半径は等しい．
複素解析的な関数
$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$
の z に関する微分は,
$\dfrac{df(z)}{dz} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + na_n z^{n-1} + \cdots$
によって得られる．

演習問題２１． $1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots+z^n+z^{n+1}+\cdots$ と $1+2z+3z^2+4z^3+\cdots+(n+1)z^n+\cdots$ の収束半径をそれぞれ求め，収束半径が等しいことを確かめてみよ．

演習問題２２． $\dfrac{1}{1-z}$ のべき級数展開を利用して，$\dfrac{1}{(1-z)^2}$ のべき級数展開を求めよ．

こぼれ話：一般の連続関数を考えることは必要か？解析的関数で十分ではないのか？

１１．実関数の微分学再論

11.1 対数関数

ここで,「愛のない微積分」の話を思い出そう．
$f(x) = e^x$ は，(実数) x に関して狭義単調増加．値域は，正の実数全体．だから，逆関数 $f^{-1}(x) = \log x$ が $x > 0$ に対してだけ定義され，狭義単調増大．$x < 0$ に対しては定義されなかった．また，$\dfrac{d\log x}{dx} = \dfrac{1}{x}, (x > 0)$ が成り立つ．いま，$\log(1+x)$ を考えると，テイラー (Taylor) 展開
$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$
が $x = 0$ の近傍で成立する．
注：テイラーはニュートン (Newton) の弟子．ニュートンがすでに，べき級数展開を使っていたので,「テイラー展開」は本来は「ニュートン展開」と呼んでも良いかも知れない．

11.2 複素対数関数

$f(z) = e^z$ は，一般の複素数 z に対して定義された (5.2)．$z = x + yi$ とおくと，指数法則から，$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi}$ あり，e^z の長さは e^x であり，e^z と 実軸との角度 (偏角) は y である．

$w = e^z$ は，“ガウス平面全体を右側にわっと寄せ，それを 0 の周りにぐるぐるに巻き付ける” という写像である．

$w_0 = e^{z_0}$ のとき，$w_0 = e^{z_0} e^{2\pi i} = e^{z_0 + 2\pi i}$ となるので，$w = e^z$ のとき，w に対して，z が１つに決まらない．
いま，$w_0 = e^{z_0} = e^{z_1}$ とおくと，$e^{z_1 - z_0} = e^{z_1} e^{-z_0} = ww^{-1} = 1$ となる．$z_0 = x_0 + y_0 i, z_1 = x_1 + y_1 i$ とおくと，$z_1 - z_0 = (x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)i$ であり，$e^{z_1 - z_0} = e^{x_1 - x_0} e^{(y_1 - y_0)i}$ が 1 に等しいので，$e^{x_1 - x_0} = 1, e^{(y_1 - y_0)i} = 1$ を得る．したがって，$x_1 - x_0 = 0, y_1 - y_0 = 2n\pi i$($n$ は整数) と表され，$z_1 = z_0 + 2n\pi i$(n は整数) と表される．つまり,

１つの w_0 に対し，$e^z = w_0$ となるような z は無限にあり，$e^{z_0} = w_0$ となる１つの z_0 をつかって，$z_0 + 2n\pi i$(n は整数) と表される．

このように，e^z の定義域を複素数平面 (ガウス平面) 全体に広げたので，そのままでは逆関数を考えられない．
$w = e^z$ という関係式を $z = \log w$ と書く．z と w を入れ替えると，指数関数の “逆関数” すなわち**対数関数**が得られる：$w = \log z$．対数関数は「多価関数」である．
$e^w = z$ なので，$w = u + iv$ とおき，$z = re^{i\theta}$ とおくと，$e^u = r, e^{iv} = e^{i\theta}$ から，$u = \log r, v = \theta + 2n\pi$ (n は整数) という形までは決まる．
そこで，z 平面から半直線 $\theta = \theta_0$ を除き，$\theta_0 < v < \theta_0 + 2\pi$ と決めておけば，$w = \log z$ は１価関数になる．このとき，z はガウス平面から半直線を除いた領域を動き，w は虚部が $\theta_0 \leqq v < \theta_0 + 2\pi$ の帯状の領域を動く．
演習問題２３． $\theta_0 = -\pi$ とおき，直前のように $w = \log z$ を定めたとき，$\log 1$, $\log i$ を求めよ．また，$i^i := e^{i \log i}$ を求めよ．

11.3 対数関数の複素微分

$e^w = z$ の両辺を z で微分をすると，$e^w \dfrac{dw}{dz} = 1$．したがって，$\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{e^w} = \dfrac{1}{z}$.

$\dfrac{d\log z}{dz} = \dfrac{1}{z}, (z \neq 0)$. $\dfrac{d\log(1+z)}{dz} = \dfrac{1}{1+z}, (z \neq -1)$.

また次もわかる：

$\log(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^6}{6} + \cdots \ (|z| < 1)$.

演習問題２４． 上の式の両辺をそれぞれ z で微分したものが等しいことを確かめよ．また，上の式の両辺にそれぞれ $z = 0$ を代入したものが等しいことも確かめよ．

11.4 コーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式

複素微分と偏微分の関係を調べる．$w = f(z)$ を複素解析的関数 (正則関数) とし，$w = u + iv, z = x + iy$ とおく．$u = u(x, y), v = v(x, y)$ は，x, y の実数値関数である．
$\dfrac{dw}{dz} = \lim_{h\to0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ であるが，とくに h を実軸上で 0 に近付けると，$\dfrac{dw}{dz} = \lim_{h\to0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} =$
$\lim_{h\to0} \dfrac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h}$
$= \lim_{h\to0} \dfrac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$
$+ i \lim_{h\to0} \dfrac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}$
$= \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を得る．
また，とくに h を虚軸上で 0 に近付けると，$h = ik$ (k は実数) と書けば，$\dfrac{dw}{dz} = \lim_{ik\to0} \dfrac{f(z+ik) - f(z)}{ik} =$

$\lim_{k\to 0}\dfrac{u(x,y+k)+iv(x,y+k)-u(x,y)-iv(x,y)}{ik}$
$=\lim_{k\to 0}\dfrac{1}{i}\dfrac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$
$+\lim_{h\to 0}\dfrac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k}$
$=-i\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$ を得る．
したがって，$\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ が成り立つので，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (**コーシー・リーマンの関係式**)

が得られる．
演習問題２５． $z=x+iy$ のとき，$w=z^3$ の実部 u と虚部 v を求め，コーシー・リーマンの関係式が成り立つことを確かめよ．

コーシー・リーマンの関係式から，
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ なので，
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ が成り立つ．同様に，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ が成り立つ．
さて，一般に，関数 $u(x,y)$ に対し，
$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ と表す．(Δ は"ラプラシアン"(Laplacian) と呼ばれる 2 階微分作用素)．
そして，$\Delta u=0$ となる関数を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ．したがって，

複素解析的関数 (正則関数) の実部と虚部は，それぞれ調和関数である．

１２．線積分と留数

12.1 線積分

ガウス平面 (複素数平面) 上の曲線に沿って，複素関数を積分できる．答えは複素数．たとえば，C を単位円 $z=e^{it}, 0\leqq t\leqq 2\pi$ としたとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z}dz=2\pi i$ である．
まず，$z(t)=x(t)+iy(t)$ を複素数値関数とするとき，t 微分を $\dfrac{dz(t)}{dt}=\dfrac{dx(t)}{dt}+i\dfrac{dy(t)}{dt}$ で定義する．また，$c(t)=u(t)+iv(t)$ を複素数値関数 ($a\leqq t\leqq b$) とするとき，$\displaystyle\int_a^b c(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$ で定積分を定義する．
さて，$f(z)$ を複素関数とし，
$C: z=z(t), a\leqq t\leqq b$
をガウス平面上の曲線とする．
このとき，

$$\int_C f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$

と定義する．これを，$f(z)$ の曲線 C に沿った**線積分** (line integral) と呼ぶ．
ここで，$f(z(t))\dfrac{dz(t)}{dt}$ は複素数値関数であることに注意する．

例：C : $z(t)=\varepsilon e^{it}, 0\leq t\leq 2\pi$ (a は複素数) のとき，$\displaystyle\int_C z^n dz$ (n は整数) を計算する．$\dfrac{dz(t)}{dt}=\varepsilon\dfrac{de^{it}}{dt}=\varepsilon ie^{it}$ なので，$\displaystyle\int_C z^n dz=\int_0^{2\pi}(\varepsilon e^{it})^n\varepsilon ie^{it}dt=\int_0^{2\pi}\varepsilon^{n+1}ie^{(n+1)it}dt=\varepsilon^{n+1}i\left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i}\right]_0^{2\pi}$
$=\dfrac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\left(e^{2(n+1)\pi i}-1\right)=0.$
ただし，これは，$n\neq -1$ のときの計算．$n=-1$ のときは，
$\displaystyle\int_C\frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon e^{it}}aie^{it}dt=i\int_0^{2\pi}dt=i\,[t]_0^{2\pi}=2\pi i.$
演習問題２６． $C: z(t)=\varepsilon e^{it}, 0\leq t\leq 2\pi$ (a は複素数) のとき，$\displaystyle\int_C\left(z+\frac{2}{z}\right)dz$ を計算せよ．

12.2 留数

$f(z)$ が点 $z=a$ を除いた近傍で正則とする．このとき，
$R(f;a):=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz$
とおく．(ただし，C は，$z=a$ のまわりを反時計まわりにまわる，半径の十分小さな円である)．$R(f;a)$ を $f(z)$ の $z=a$ における**留数** (residue) とよぶ．

例：$f(z)=z^n$ の $z=0$ における留数は，$n\neq -1$ のとき 0 で，$n=-1$ のときだけ 1. $R(z^n,0)=0 (n\neq -1)$. $R(\dfrac{1}{z},0)=1$.

12.3 ローラン (Laurent) 展開

$z=a$ を除いた近傍で正則な関数 $f(z)$ を
$f(z)=\cdots+\dfrac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\dfrac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\dfrac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots$ との形の式に表したものを $f(z)$ の $z=a$ における**ローラン展開** (Laurent expansion) という．
注：もし，$f(z)$ が $z=a$ でも正則なら，$a_{-n}=0$ ($n=1,2,\ldots$) である．このときは，ローラン展開はすなわち，テイラー展開．
演習問題２７． $f(z)=\dfrac{1+z+z^2+z^3}{z^2}$ の $z=0$ におけるローラン展開を書け．また，$\displaystyle\int_C\frac{1+z+z^2+z^3}{z^2}dz$ を求めよ．ただし，$C: z(t)=\varepsilon e^{it}, 0\leq t\leq 2\pi, \varepsilon>0$.

12.4 ローラン展開の係数と留数

簡単のため，$a=0$ とする．
$f(z)=\cdots+\dfrac{a_{-n}}{z^n}+\cdots+\dfrac{a_{-2}}{z^2}+\dfrac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$
の両辺を積分すると，
$\displaystyle\int_C f(z)dz=\cdots+\int_C\frac{a_{-n}}{z^n}dz+\cdots+\int_C\frac{a_{-2}}{z^2}dz+\int_C\frac{a_{-1}}{z}dz$
$\displaystyle+a_0+a_1\int_C zdz+\int_C a_2z^2dz+\cdots+\int_C a_nz^ndz+\cdots=$
$a_{-1}2\pi i$ なので，
$a_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz=R(f;0).$

$f(z)$ の $z=0$ における $f(z)$ の留数 $R(f;0)$ は，$f(z)$ の $z=0$ におけるローラン展開の $\frac{1}{z}$ の係数に等しい．

一般に，

$f(z)$ の $z=a$ における $f(z)$ の留数 $R(f;a)$ は，$f(z)$ の $z=a$ におけるローラン展開の $\frac{1}{z-a}$ の係数に等しい．

もし，極限値 $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ が存在するならば，その極限値は留数 $R(f;a)$ に等しい．

１３．コーシー (Cauchy) の積分定理

13.1 コーシーの積分定理
複素関数論で一番大切な定理．

ガウス平面上の単純閉曲線 C とその内部で正則な関数 $f(z)$ について，$\int_C f(z)dz=0$ が成り立つ．

13.2 コーシーの積分公式

ガウス平面上の単純閉曲線 C とその内部で正則な関数 $f(z)$ について，内部の各点 a に対して，
$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$ が成り立つ．

13.3 留数定理

ガウス平面上の単純閉曲線 C の内部の点 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ を除いて正則な関数 $f(z)$ について，
$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{i=1}^{m}R(f;a_i)$ が成り立つ．

13.4 対数関数再考
コーシーの積分公式を利用して，微分方程式 $\frac{dy}{dz}=f(z)$ を解くことを考えよう．つまり，不定積分 (原始関数) を，複素数の範囲で考えてみよう．

例：方程式 $\frac{dy}{dz}=\frac{1}{z}$ を解くことを考える．ただし，$\frac{1}{z}$ で正則でないことに注意する．$z_0=1$ とし，複素数 z_1 $(z_1\neq 0)$ に対し，z_0 と z_1 を結ぶ曲線 C を選び，線積分 $I(z_1):=\int_C \frac{1}{z}dz$ を考える．

$I(z_1+h)-I(z_1)=\int_{C_h}\frac{1}{z}dz$ である．ただし，C_h は z_1 と z_1+h を結ぶ線だが，コーシーの積分定理から，$C_h: z_1+th.(0\leqq t\leqq 1)$ という線分上で積分して求めてよい．$z=z_1+th$ とおくと，$\frac{dz}{dt}=h$ なので，
$I(z_1+h)-I(z_1)=\int_0^1\frac{1}{z_1+th}hdt.$
よって，$\frac{I(z_1+h)-I(z_1)}{h}=\int_0^1\frac{1}{z_1+th}dt\to\int_0^1\frac{1}{z_1}dt=\frac{1}{z_1}.$ これは，任意の z_1 で成り立つので，$\frac{dI(z)}{dz}=\frac{1}{z}.$ 複素対数関数 $\log z$ についても $\frac{dlogz}{dz}=\frac{1}{z}$ が成り立ち (11.3)，$\log(1)=0=I(0)$ なので，$I(z)$ と $\log z$ は一致する：

$$\log z:=\int_1^z\frac{dz}{z}.$$

ただし，$\log z$ は，1 と z を結ぶ曲線が，原点を何周するかで値が変わってくる多価関数である．(留数 $R(\frac{1}{z},0)$ が効く)．

１４．実関数の積分学再論

14.1 留数の応用
コーシーは，それまで知られていた積分の計算を見通し良くするために，複素数を利用しはじめ，そのために，複素関数論の基礎を作った．

例：$I=\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ の計算．
$I(r):=\int_0^r\frac{\cos x}{x^2+1}dx$
$=\frac{1}{2}\int_0^r\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-r}^r\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz.$
実軸上を $-r$ から r まで進み，原点中心で半径 r の半円 (C') に沿って戻る閉曲線を C とすると，
$\int_C\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=2I(r)+\int_{C'}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz.$
閉曲線 C および内部について，$f(z):=\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ は $z=i$ 以外で正則なので，$\int_C\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=2\pi iR(f;i)$．一方，
$R(f;i)(=a_{-1})=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i}$
$=\frac{e^{-1}}{2i}$．また，
$\left|\int_{C'}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right|\leq\int_{C'}\frac{|e^{iz}|}{|z^2+1|}|dz|$
$\leq\pi r\frac{1}{r^2-1}\to 0(r\to 0).$
ここで，$|e^{iz}|\leq 1$ は，$z=r\cos t+i\sin t$ とおくと，C' 上で，$r\sin t\leq 0$ なので，
$|e^{iz}|=|e^{ir\cos t}||e^{-r\sin t}|=|e^{-r\sin t}|\leq 1$ からわかる．
よって，$2I=2\pi i\frac{e^{-1}}{2i}.$

したがって，$I = \dfrac{\pi}{2e}$.

演習問題２８． プリントの内容に自分で言葉や図を補って，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ の留数を使った計算を詳しく説明せよ．

例２．$\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ の計算．

$\displaystyle I(R) := \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}dx$ とおく．今，実軸を $-R$ から R まで動き，その後，半径 R の半円を反時計まわりにまわる曲線 C' で閉じる閉曲線を C とし，$f(z) := \dfrac{1}{z^4+1}$ を C に沿って線積分する．
$z^4+1=0$ の４つの解を $a_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, a_2 = a_1 i, a_3 = a_1 i^2 = -a_1, a_4 = a_1 i^3 = -a_2$ とすると，C の内部には，a_1, a_2 があり，それ以外で，$f(z)$ は正則なので，留数定理から，
$\displaystyle\int_C f(z)dz = 2\pi i(R(f(z),a_1)+R(f(z),a_2))$ を得る．
$\displaystyle\int_C f(z)dz = I(R) + \int_{C'} f(z)dz$ であるが，
$\displaystyle\left|\int_{C'} f(z)dz\right| \leqq \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0(R\to\infty)$ なので，
$R\to\infty$ として，$I = 2\pi i(R(f(z),a_1)+R(f(z),a_2))$ がわかる．さて，
$R(f(z),a_1) = \lim_{z\to a_1}(z-a_1)\dfrac{1}{z^4+1} = \dfrac{1}{4a_1^3} = \dfrac{-1-i}{4\sqrt{2}}$
$R(f(z),a_2) = \lim_{z\to a_2}(z-a_2)\dfrac{1}{z^4+1} = \dfrac{1}{4a_2^3} = \dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$.
したがって，$2\pi i(R(f(z),a_1)+R(f(z),a_2)) =$
$2\pi i\left(\dfrac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. したがって，
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ となる．

１５．フーリエ級数

15.1 フーリエ級数
フーリエ級数は，Fourier(1768 ～ 1830) が熱方程式を解くために使ったことに由来する．現在では，さまざまな科学技術の分野で広く応用されている．

$a_0 + a_1\cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x + a_2\cos 4\pi x + b_2\sin 4\pi x$
$+\cdots + a_n\cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x + \cdots$
の形の無限級数を**三角級数** (trigonometric series) あるいは**フーリエ級数** (Fourier series) とよぶ．
フーリエ級数は，
$\cdots + c_{-n}e^{-2n\pi ix} + \cdots + c_{-1}e^{-2\pi ix} + c_0 + c_1 e^{2\pi ix} + \cdots + c_n e^{2n\pi ix} + \cdots$
の形 (複素形) に表すこともできる．ここで，
$c_0 = a_0, c_1 = \dfrac{a_1}{2} - \dfrac{b_1}{2}i, \ldots, c_n = \dfrac{a_n}{2} - \dfrac{b_n}{2}i, \ldots,$
$c_{-n} = \dfrac{a_{-n}}{2} + \dfrac{b_{-n}}{2}i$ である．

演習問題２９．
(1) $z = e^{2\pi ix}$ とおくとき，$1+z+z^2+\cdots+z^n$ の実部と虚部を書け．
(2) x が整数でないとき，
$$\sin 2\pi x + \sin 4\pi x + \cdots + \sin 2n\pi x = \frac{\sin n\pi x\sin(n+1)\pi x}{\sin\pi x}$$
を示せ．
(ヒント：$w = e^{\pi ix}$ とおくと，$z = w^2$ であるが，
$\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{1-w^{2(n+1)}}{1-w^2} = w^n\dfrac{w^{-(n+1)} - w^{(n+1)}}{w^{-1}-w}$.)

例：三角級数 $\sin 2\pi x + \sin 4\pi x + \cdots + \sin 2n\pi x + \cdots$ の部分和は，$\dfrac{\sin n\pi x\sin(n+1)\pi x}{\sin\pi x}$ なので，たとえば，$x = \dfrac{1}{2}$ のときは，0 に収束する．$x = \dfrac{1}{4}$ のときは収束しない (振動する)．

$z = e^{2\pi ix}$ とおくと，フーリエ級数は $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m z^m$ と表される．したがって，フーリエ級数は，ローラン級数を $|z|=1$ の部分に制限して考えたものだと言える．

15.2 フーリエ係数
区間 $[0,1]$ において，複素数値関数 $f(x)$ が
$\cdots + c_{-n}e^{-2n\pi ix} + \cdots + c_{-1}e^{-2\pi ix} + c_0 + c_1 e^{2\pi ix} + \cdots + c_n e^{2n\pi ix} + \cdots$
というフーリエ級数に展開できるかどうか考えよう．
そのために，まず，仮にフーリエ級数で表されたとする．
整数 m について，$\displaystyle\int_0^1 e^{2m\pi ix}dx$ は $m\neq 0$ のときは 0 で，$m=0$ のときは 1 に等しいので，

$$\boxed{c_m = \int_0^1 f(x)e^{-2m\pi ix}dx,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.}$$

を得る．上の積分で定めた数 c_m を $f(x)$ の**フーリエ係数**とよぶ．
$f(x)$ に対して，フーリエ係数 c_m を定めたとき，

$$\boxed{f(x) \sim \cdots + c_{-n}e^{-2n\pi ix} + \cdots + c_{-1}e^{-2\pi ix} + c_0 + c_1 e^{2\pi ix} + \cdots + c_n e^{2n\pi ix} + \cdots}$$

と表す．”=” と書かないのは，右辺が収束するかわからないし，収束しても，それが $f(x)$ に等しいかどうかわからないからである．右辺を **$f(x)$ のフーリエ級数**とよぶ．
ただし，この場合，部分和は，
$\displaystyle s_n := \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{2k\pi ix}$ とする．

三角関数による級数の形の場合は，自然数 n, m に対して，
$\displaystyle\int_0^1 dx = 1,$
$\displaystyle\int_0^1 (\cos 2n\pi x)^2 dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 (\sin 2n\pi x)^2 dx = \frac{1}{2}, (n\neq 0),$
$\displaystyle\int_0^1 \cos 2m\pi x\cos 2n\pi x dx = 0, (m\neq n),$
$\displaystyle\int_0^1 \sin 2m\pi x\sin 2n\pi x dx = 0, (m\neq n),$
$\displaystyle\int_0^1 \cos 2m\pi x\sin 2n\pi x dx = 0$
が成り立つので，
$\displaystyle a_0 = \int_0^1 f(x)dx,$

$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2n\pi x dx, (n = 1, 2, \dots)$
$b_n = \frac{1}{\pi} 2\int_0^1 f(x)\sin 2n\pi x dx, (n = 1, 2, \dots)$
とおいて,

$$f(x) \sim a_0 + a_1\cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x + a_2\cos 4\pi x + b_2\sin 4\pi x + \cdots + a_n\cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x + \cdots$$

と表す．どちらの形式で表しても，得られた結果は翻訳できる．

例：$f(x) = x, (0 \leqq x \leqq 1)$．フーリエ係数は，部分積分の方法を使って，$m \neq 0$ のとき，
$c_m = \int_0^1 xe^{-2m\pi ix}dx =$
$\left[\frac{xe^{-2m\pi ix}}{-2m\pi i}\right]_0^1 - \left(-\frac{1}{2m\pi i}\right)\int_0^1 e^{-2m\pi ix}dx = \frac{i}{2m\pi},$
$c_0 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ を得る．したがって，
$x \sim \cdots - \frac{i}{2n\pi}e^{-2n\pi ix} - \cdots - \frac{i}{2\pi}e^{-2\pi ix} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}e^{2\pi ix} + \cdots + \frac{i}{2n\pi}e^{2n\pi ix} + \cdots.$

これを三角関数で表すと，
$x \sim \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\pi x}{\pi} - \cdots - \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} - \cdots$
となる．ところで，$0 < x < 1$ で両辺が等しいことがわかるので (15.3)，$x = \frac{1}{4}$ とおくと，
$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} - \cdots - \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} - \cdots.$ がわかる．
よって，$\frac{1}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \cdots.$ したがって，
$\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} + \cdots$
$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$
(グレゴリーの公式) をもう一度得る．

例：$f(x) = x^2, (0 \leqq x \leqq 1)$.
$c_m = \int_0^1 x^2e^{-2m\pi ix}dx = \frac{i}{2m\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m\pi}\right)^2, (m \neq 0).$
$c_0 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. したがって，
$x^2 \sim \sum_{m=-\infty}^{m=-1}\left(\frac{i}{2m\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m\pi}\right)^2\right)e^{2m\pi ix} + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{i}{2n\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2\right)e^{2n\pi ix}.$

15.3 フーリエ級数の収束
さて，フーリエ級数が収束するか，また，その和がもともとの関数 $f(x)$ に等しくなるか，ということが重要な問題となる．
$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ 上の関数としたとき，それを，$0 \leqq x < 1$ で考えて，整数分だけグラフを平行移動することにより，実数全体で定義された関数に拡張する．つまり，$f(x) := f(x - [x])$ と定める．ここで，$[x]$ は x のガウス記号 (x を超えない最大の整数)．したがって，$x - [x]$ は x の小数部分．
すると，拡張した関数 $f(x)$ は周期が 1 の関数になる．つまり，$f(x+1) = f(x)$ が任意の x について成立する．
もとの $f(x)$ が $[0,1]$ 上で連続であっても，$f(x)$ は実数全体で連続とは限らない．
$f(x)$ が $[0,1]$ 上で微分可能のとき，拡張した $f(x)$ は区分的に微分可能である．

ディリクレ・ジョルダンの定理 (Drichlet-Jordan)：
周期が 1 の関数 $f(x)$ が区間 $[0,1]$ で区分的に微分可能なとき，$f(x)$ のフーリエ級数は，区間 $[0,1]$ の各点で収束し，点 x_0 での極限値は，

$$\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$$

に等しい．特に，$f(x)$ が x_0 で連続なときは $f(x)$ のフーリエ級数は，$x = x_0$ で $f(x_0)$ に収束する．

ここで，$f(x_0 - 0)$ は $f(x)$ の x_0 における**左側極限**であり，$f(x_0 + 0)$ は $f(x)$ の x_0 における**右側極限**である．$f(x)$ が x_0 で連続であれば，$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ が成り立つ．

演習問題３０．
(1) 関数 $f(x) = x^2(0 \leqq x < 1)$ を周期 1 の関数に拡張し，拡張した関数に関して，$x_0 = 0$ のとき，$\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) = \frac{1}{2}$ を確かめよ．
(2) x^2 のフーリエ級数の $x_0 = 0$ における和に対し，ディリクレ・ジョルダンの定理をあてはめて，
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ．

レポート問題：

演習問題２，３，４，７，９，１１，１２，１３，１５，１８，１９，２０，２１，２２，２３，２５，２７，２８，２９，３０
の計２０題の詳しい完全解答をレポートとして提出すること．
表紙には，氏名，学生番号を明記してください．
締めきり厳守：２００３年8月８日の正午.
提出先：共通教育専用レポートボックス.
担当教官：石川剛郎 (いしかわ・ごうお)

愛で始まり愛で終わる微積分.
では，ご機嫌よう，さようなら.
