

数学概論 A (愛ではじまる微積分) 演習問題の愛の略解とヒント  
2003年7月 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問題 1 . 略 . / 問題 2 . 略 . / 問題 3 .  $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \dots$  / 問題 4 .  $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$  . / 問題 5 . 半径 1, 2,  $\frac{1}{4}$  の円を描く . 図を書いて説明するとよい . / 問題 6 . 半径  $r$  の円板の内部 . / 問題 7 .  $z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$  とおくと ,  $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta$  となる .  $x + iy = z + \frac{1}{z}$  とおくと ,  $x = (r + \frac{1}{r}) \cos \theta, y = (r - \frac{1}{r}) \sin \theta$  となる ... / 問題 8 . 略 . / 問題 9 . 講義で説明した内容も参考にしてください . / 問題 10 .  $e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$  の両辺を  $h$  で割ってから ,  $h$  に 0 を代入するとよい . / 問題 11 .  $e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$  の両辺を  $t$  で微分する . / 問題 12 .  $c_1 = ay_0, 2c_2 = ac_1, 3c_3 = ac_2, \dots, nc_n = ac_{n-1}$  から ,  $c_n = \frac{a^n}{n!}y_0$  . / 問題 13 . 簡単 . / 問題 14 .  $\text{Arctan}(x)$  と  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  の両方の微分が等しいことと ,  $x = 0$  での値が同じことを示せばよい . / 問題 15 . ぜひ , 自分で電卓をたたいてください ! その経過と結果を報告してください ! 打ち込め青春 . / 問題 16 . 簡単です ! / 問題 17 . 16 を使えば簡単です . / 問題 18 . これも  $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta$  を使えば簡単ですね . / 問題 19 . 指数法則 (5.3) を使って計算します . / 問題 20 .  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h}$  を計算します .  $(z+h)^n = z^n + nz^{n-1}h + (h \text{ の 2 次以上の項})$  となるのが本質的な点です . ただし , レポートに書く場合は , 2 項定理をつかって , 式を完全に書いてください . / 問題 21 . (9.2) の 1 番目の計算法を使います . / 問題 22 .  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \dots +$  の両辺を  $z$  で微分します . (10.1) 参照 . / 問題 23 .  $\theta_0 = -\pi$  の場合 ,  $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$  については ,  $w = \log z = u + iv$  は  $u = \log r, v = \theta$  で決まります . そこで ,  $\log 1$  は  $z = 1 = 1e^{i0}$  つまり ,  $r = 1, \theta = 0$  の場合です .  $\log i$  は ,  $z = i = 1e^{i\frac{\pi}{4}}$  つまり ,  $r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$  の場合です . それから ,  $i^i = e^{i \log i}$  が計算できます . / 問題 24 . 簡単ですね . / 問題 25 .  $(x + iy)^3$  の計算をして , その実部と虚部を求めます . / 問題 26 .  $\int_C (z + \frac{2}{z}) dz = \int_C z dz + 2 \int_C \frac{1}{z} dz$  を計算します . / 問題 27 . 簡単です . / 問題 28 . がんばってください . / 問題 29 . (1) オイラーの公式  $z^n = e^{2n\pi i x} = \cos(2n\pi x) + i \sin(2n\pi x)$  を使います . (2) は問題文にヒントがあります .  $w^{-1} = e^{-\pi i x} = \cos(\pi x) - i \sin(\pi x)$  に注意しましょう . / 問題 30 . (1) グラフを書いてみましょう . 不連続なグラフです . 毛がつんつん立っている感じです . (15.2) の最後の例 (愛 11 の左中) の右辺の式に  $x = 0$  を代入します . 途中で ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$  という式が出るはずですが .