数学概論Ａ (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. ７ (２００３年7月４日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. Cauchy の積分定理はどういった点で一番大切なのでしょうか？// どういう時にこの定理は登場するのでしょうか？

答. おはようございます．ところで，講義で渡しているプリントは，僕 (石川) のホームページ
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/ ishikawa/lecture.html
から見ることができます．ミスプリントも訂正してあります．参考にしてください．さて回答ですが，コーシーの積分定理は，正則関数の特徴を一番良く表している定理なので大切です．いろいろな分野で複素関数論は必要になるのですが，その複素関数論の基礎になるのがコーシーの積分定理や積分公式です．”こうして”，重要な定理になりました．もちろん，それらは定理の条件がみたされる場合に使用することができます．

問. ほとんどの定理や公式で,「正則な関数 $f(z)$ について...」となっていますが,「正則」についてもう一度再確認のために聞きたいです．//「正則」の意味がよくわかりません．// 正則でない関数というのはどういうものですか？正則とは具体的にどのような意味ですか？// コーシーの積分定理は正則でなければ成り立たないのですか？// どのようなものかよく分かりませんでした．// テイラー展開できるならば正則関数でよいのでしょうか？

答. そうです．定義の仕方は複数あります．どれも同じ条件になります．この講義で採用した定義は「$f(z)$ が正則 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 各点の近傍でべき級数展開できる」です (9.3)．正則ならば，複素微分できます (10.1)．実は，複素微分できると，べき級数展開ができる，ということがわかり,「$f(z)$ が正則 $\Leftrightarrow$ 各点で複素微分可能」が成り立ちます．(実数の範囲では，べき級数展開できる，という条件の方が，微分できる，という条件より強い条件になります．実数の範囲で考えることと，複素数の範囲で考えることの違いがここに現れています)．コーシーの積分定理は正則ならば成り立ちます．正則でなければ成り立たないことは，もちろんあります．たとえば，$f(z) = \dfrac{1}{z}$ は $z = 0$ で正則ではありません．($z = 0$ で定義されないから)．そして，講義で説明したように，0 の周りを回る曲線に沿って線積分しても 0 になりません．($2\pi i$)．

問. 「十分小さい C」とは何ですか？a に近付いて極限を考えているのですか？それとも,「十分小さい」と見なせる範囲があるということですか？「近傍」というのもよくわからないのですが．

答. 十分小さいと見なせる範囲があるということです．近傍とは，”近所”というのと同じ意味の専門用語で，正数 $\varepsilon > 0$ に対して，領域 $|z-a| < \varepsilon$ のことを，a の ε 近傍と言います．ε をごくごく小さくとって固定します．積分する関数が正則であるような範囲で積分するということです．

問. コーシーの積分公式で，点 a の周りをまわって戻ってくるというイメージがよく分かりません．

答. 曲線を点の動く「経路」と考えると，考えやすいと思います．

問. $z = a$ のまわりを反時計まわりにまわる円とありますが，これはなぜ反時計でないといけないのですか？// 図の説明での右回りと左回りとはどうちがうのですか？// 時計まわりにすると何か不都合なことが起こったり，おかしなことが起こったりしてしまうのでしょうか？

答. 反時計まわりでないといけないわけではありません．ただ，反対向きに積分すると数値にマイナスがついてくるので，とにかく，どちら向きかを特定しなければ話がまとまらないだけです．ところで，時計回り，反時計まわり，というのは数学用語ではありません．実際，鏡に写った世界 (あるいは理容店の時計) では逆になり汎用性がありません．わかりやすいので仕方なく使っている用語です．正確には，ガウス平面で θ が増加するときに $e^{i\theta}$ が動く向き，ということです．そんなこと”ほっとけ”と言われるかもしれませんが，ろくろく (clock) 考えもしないで時計回りとか反時計回りとか言わないようにしましょう．

問. 積分するのに向きってあるんですか？方向を逆にしたら答えが変わるのでしょうか？//「行って戻って積分すると打ち消しあう...」という部分がよくわかりません．

答. 方向を逆にすると，符号が逆になります．符号が逆になるので，加えると 0 になります．

問. 線積分について詳しく教えてください．$\displaystyle\int_C f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$ の $\dfrac{dz(t)}{dt}dt$ は $d(z(t))$ としても良さそうな気がします．また，線積分は答えは複素数になるということですが，この値は何を表しているのでしょうか？

答. $\dfrac{dz(t)}{dt}dt$ は $d(z(t))$ としてもよいですが，それは $\dfrac{dz(t)}{dt}dt$ のことを $d(z(t))$ と表すだけで，実際の計算は，$f(z(t))\dfrac{dz(t)}{dt}$ の積分をします．実数の線積分は，曲線の長さなどの意味があるのですが，複素の線積分は，そのような意味を超えた世界であると考えた方が世界が広がって良いと思います．あえて意味を探せば，留数の概念を導くためだった，とも言えます．こういう抽象的な積分を考えたおかげで，実積分の計算が楽になります．

問. 「留数」とは何ですか？// 留数定理の計算上の活用法は何ですか？// 留数がちっとも分かりません．それを導入したメリットや意義がつかめません．// 留数は何かに使うために求めるのですか？

答. 留数とは，留まる数．積分しても残る数.「積分する関数の非正則性からくる積分値のおつり」です．この”おつり”を使って，難しい定積分が楽に計算できます．講義で紹介します．

問. 留数定理がわかりません．$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = 0$ になると思います．// コーシーの積分定理とコーシーの積分公式を比べると，$\displaystyle f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 0 = 0$ となると思うのですが．

答. この状況では，$f(z)$ が正則でも，$\dfrac{f(z)}{z-a}$ が正則であるとは限らないから，コーシーの積分定理が適用できません．ちなみに,「$\dfrac{f(z)}{z-a}$ が正則 $\Leftrightarrow f(a) = 0$」が成り立つので，矛盾は解消されます (矛盾はもともとなかった)．こ

の質問のように，いろいろな定理を組み合わせて思考実験してみるのは，とても良いことですね．

問． ローラン展開 $f(z) = \cdots + \dfrac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$ の係数は，どのように決定するのですか？

答． 良い質問ですね．$a_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)(z-a)^{n-1}dz$ です．というのは，$f(z)(z-a)^{n-1} = \cdots + \dfrac{a_{-(n+1)}}{(z-a)^2} + \dfrac{a_{-n}}{(z-a)} + a_{-(n-1)} + \cdots$ の留数が a_{-n} だからです．

問． $f(z)$ が $z=a$ で正則ならば $a_{-n} = 0 (n = 1, 2, \ldots)$ となるのがよくわかりません．

答． $f(z)$ が正則ならば，$f(z)(z-a)^{n-1}$ は正則なので，コーシーの定理を使って $a_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)(z-a)^{n-1}dz = 0$ です．(コーシーの定理を使わない証明もあります)．

問． $f(z)$ が $z=a$ を除いた近傍で正則とありますが，点 a だけが $f(z)$ に入らないということでしょうか？

答． a だけが $f(z)$ の定義域に入らないということです．小さな穴のあいた"やかん"の底を連想するとよいと思います．正則でないので，そこから水がもれます．

問． ローラン展開の方が一般的で，それほど形も難しくないのに，テイラー展開の方がよく使われることに何か意味があるのですか？なぜ，ローラン展開を教えずにテイラー展開を早い段階で教えるのでしょうか？// テイラー展開でなければいけない場合はあるのでしょうか？

答． なるほど．でも，テイラー展開の方がより基本的で汎用性が広いから早く教わります．そして，実数の範囲では，ローラン展開の位置付けがはっきりしないからです．複素数の範囲で考える段階ではじめてはっきりわかる，ということです．複素数の範囲で微分積分を扱い，テイラー展開できる範囲を超えて議論するときに登場するのが自然であって，よりインパクトが強いと思います．

問． ローラン展開 $f(z) = \cdots + \dfrac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$ はどのような時に使われるのでしょうか？a とどのような関係を示すのでしょうか？// ローラン展開の意味が分かりません．ローラン展開できる $f(z)$ はどのようなものに限られるのでしょうか？// ローラン展開は，実際のことには，どのように使われるのですか？

答． 具体例で説明します．関数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ に注目してみましょう．$\dfrac{1}{1-z}$ は $z=1$ 以外では正則です．たとえば，$z=0$ において，$\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ とべき級数展開できるので正則です．$z=1$ では，分母が 0 になってしまうので，正則ではありません．でも，ローラン展開はできます．$\dfrac{1}{1-z}$ はそのままでローラン展開の形になっています．このように $z=a$ 以外で正則な関数がローラン展開できます．

問． テイラー展開とかローラン展開で $f(z)$ が何で近似できるのでしょうか？

答． テイラー展開では多項式で近似しますが，ローラン展開ではローラン多項式 (多項式を $z-a$ のべき，つまり $z-a, (z-a)^2, (z-a)^3$ などで割って得られる式) で近似する発想です．

問． テイラーの定理とマクローリンの定理とはどう違うのですか？テイラーの定理はマクローリンの定理の一般形だと思います．

答． まったくその通りです．$z-a$ による展開で，$a=0$ の場合がマクローリンの定理と呼ばれていますね．まあ，名前は別にどうでも良いと思います．

問． フーリエ級数というものは関数を三角級数で近似するものだったと記憶しています．この三角関数そのものはいつごろ誕生したのでしょうか？測量等にも使われたらしいので，かなり昔だと思いますが...

答． その通りです．かなり昔です．ただし，"関数"というのは近代的な概念であって，昔は「三角比」と呼ばれていました．

問． $e^{(n+1)i2\pi} = 1$ になっているのですか？これは $e^{2\pi i} = 1$ から導かれるものですか？

答． そうです．$e^{(n+1)i2\pi} = (e^{2\pi i})^{n+1} = 1^{n+1} = 1$ です．

問． 数学は大きく分けて代数，幾何，解析，数理科学と分けられますが，大学の先生たちは，自分の専門分野はあるにしても，それ以外の分野も勉強したのですか？勉強したとしたら，大体，大学何年目レベルまでやったのですか？

答． 研究は個人がするものなので，個人差があります．なんとも言えませんね．要するに好きにすれば良いわけです．ところで，数学の分野の分け方は便宜的なものです．代数，幾何，解析といっても分類基準は明確ではありません．ましてや数理科学というと，範囲が広すぎて内容がはっきりしません．学問というものは，あくまで流動的なもので，動きを止めたら"死んでしまいます"．それから，必要があれば何でもします．おもしろければ勉強します．つまらないこと，やりたくないことはする必要がありません．「強いて勉める」のが勉強であって，「強いられて勉めさせられる」のが勉強ではありません．また，勉強に大学何年目レベルというものもありません．数学は一つだからです．したい時にしたい事をするのが勉強です．日々つねにゼロからの出発です．

問． 現在も新しい定理や公式などが発見されているのですか？

答． もちろん発見されています．たとえば，虚数単位の i ですが，以前説明したように，何百年もの間，人々には認められてきませんでした．でも，その i で始めると，微積分の世界が広がり，いろいろな新しい定理が発見された，ということを紹介しました．現在でも，i のような存在は，いたるところにあると思います．そこにあるのに，だれも見ようとしない．見過ごして，真剣に向き合おうとしない．でも，実は大切だったんだ．それに後から気が付く，そのようなことは多いと思います．このように，数学の話に限らず，愛がなければ，平凡な日々ですが，愛があれば，身近なところに日々新たな発見があるということです．僕 (石川) も現在一念発起，虚仮 (こけ) の一念で，一年一定理を目標に愛にあふれて頑張っています．皆さんもどんどん新しい発見をしてくださいね．ではまた，