数学概論Ａ (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. ６ (２００３年６月２０日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． $w = e^z$ の写像がイメージしづらいです.「$e^z = e^x e^{iy}$ の e^{iy} が実軸との角度を表す」という事実に抵抗を覚えます. 極形式等に変換できたら教えてください. // 「$w = e^z$ は，“ガウス平面全体を右側にわっと寄せ，それを 0 の周りにぐるぐるに巻き付ける” という写像である」とはどういうことですか？”0 の周りにぐるぐるに巻き付ける”とはどういうことですか？// １対１でないとはどういうことですか？// 複素対数関数とグラフの関係がよくわかりません.

答． おはようございます. さて回答ですが，オイラーの公式を思い出すと，疑問が解けると思います. つまり，$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ なので，$z = x + iy$ とおくと，$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ です. $w = u + iv = e^z$ とおくと，$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ という対応になります. したがって，$w = e^z$ をガウス平面 (この場合，uv-平面) の上に表すと，原点からの距離が e^x で，実軸との角度が y の位置にあります. いま，x を固定して y を動かすと，e^z は，原点を中心に半径が e^x の円の上を動きます. そのことを,「ぐるぐるに巻き付ける」と表現したわけです.「ぐるぐる」というのは，もちろん数学用語ではなく，あくまで教育的な説明のための擬態語です. ともかく，同じ点を何度も通るので，１対１ではありません. １対１にするには，定義域 ($z = x + iy$ の動く範囲) を制限する必要があります.

問． 「写像」とは何ですか？

答． もともとは「像を写す」という意味です. 数学では,「写像」は非常に基本的な用語として,「実関数」も「複素関数」も含んだ広い意味で使われます. すなわち，**「写像」とは，定義域とよばれる集合と，値域と呼ばれる集合を指定し，定義域の各点に，値域の点を対応させる規則のことです**.

問． $w = \log z$ 対数関数は「多価関数」である，とありますが，多価関数，一価関数とは何ですか？

答． 多価関数とは，数値が１つに定まらなくて，複数の値をとるような「関数」のことです. また，数値が１つに定まるものを，一価関数あるいは単に関数とよびます. 物の値段でたとえると，希望小売価格が決まっているのが一価関数で，オープン価格が多価関数，といったところです. たとえば，$w = f(z) = \sqrt{z}$ も複素数の範囲で多価関数の例になります. なぜなら，複素数 z に対し $w^2 = z$ となるような w は２つ ($z = 0$ の時だけ $w = 0$ の１つ) あるからです. 実数の範囲でも，arcsin 等の逆三角関数は，値域をきめておかないと，多価関数でしたね. 現代では，関数というと，通常，一価関数のことを意味します. そこで，範囲を限るなどして，一価関数を決める作業をします.

問． e^z の定義域がガウス平面なのに，逆関数をなぜ考えられるのか分かりません.

答． 確かに，勝手な関数の逆関数は考えられないのですが，写像として１対１になる範囲に限定すれば，逆が考えられます. これは，実関数でも複素関数でも同じ考え方が通用します. ともかく w に対して $w = e^z$ から z を (z の取り得る範囲を限定して) １つに決めようというわけです.

問． $f : z \mapsto w\ w = f(z) = e^z$ とすると，$e^z = w_0$ となる z が無限にあるので,「被覆」ではないですか？

答． 被覆です. $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}, f(z) := e^z$ という写像によって，$\mathbf{C}$ は $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ の「被覆空間」になります. ただし「可算無限枚」の被覆です.

問． リュービルの定理で，なぜ定数となるのかがよく分かりません. // 感覚的にも理解しにくいため，ちょっとした考え方とか，気持ちの説明を加えてください.

答． 証明の荒筋は次のようになります：$f(z)$ が有界は整関数とすると，$f(z)$ は「無限遠点」の近傍で有界になり，ガウス平面に無限遠点を付け加えてできる「ガウス球面」上で正則になります. コンパクトであるガウス球面上で正則な関数は,「最大値原理」から定数に限ります. 無限遠点の近傍での $f(z)$ の挙動は，$\zeta = \dfrac{1}{z}$ とおいて，$f(\dfrac{1}{\zeta})$ とおいて調べることができます. そのための「コーシーの定理」や「ローラン展開」は，これから紹介していく予定です.

問． 整関数の例として $\sin z$ が出てきましたが，$\sin z$ は有界な整関数ではないのでしょうか？

答． 実数の範囲では確かに有界なのですが，複素数の範囲では有界ではありません. たとえば，定義から，$\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ですが，純虚数 $z = iy$ に対し，$\sin iy = \dfrac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$ なので，$y \to \infty$ のとき，$|\sin iy| = \left|\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right| = \dfrac{|e^{-y} - e^{y}|}{2} \to \infty$ と無限大に発散することがわかり，有界ではないことがわかります.

問． 「一様収束」の定義と使い方がよくわかりません. この概念はどういったもののために考えられ,

どのようなときに使うのでしょうか？

答．各点収束と一様収束の違いが認識さてれたことは，解析学にとって，画期的なことだと思います．べき級数などのように関数からなる級数が表す関数の性質を調べるために考えられ，調べるときに使います．ところで，コーシー先生は，最初，各点収束と一様収束の違いに気が付かなかったと言われています．一様収束の一番の効用は，関数列 $f_n(x)$ が一様収束すれば，$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$ が成り立つ，つまり，極限をとる順序の交換ができるということです．(一応，実数の範囲で書いていますが，複素変数でも通用する話です)．

問．複素関数の微分では一体何が求まっているのですか？// 複素関数の微分は，どう定義されるのですか？実関数の微分は，x が Δx だけ増えたときの y の一次近似の変化量でしたが，複素数になった場合も同様に表現されるのでしょうか？

答．そうです．まったく同様に表現されます．

問．コーシーが複素関数論の発展に与えたことは何でしょうか？

答．基礎的なことはすべてコーシーによって与えられたといった過言ではありません．今後もコーシーの名前はたくさん出て来ます．

問．ガウス平面がよくわかりません．ガウス平面の「ガウス」は何に由来しているのですか？

答．数学者 Gauss に由来しています．ところで，彼は電磁気も研究したので，磁気の単位も「ガウス」ですね．

問．”フラクタル” とは何なのですか？

答．狭い意味では「自己相似図形」のことです．いくらでも小さな一部分がその図形と相似になるような図形のことです．非常に複雑な図形も出てくるのですが，自然にある形はそのような構造をもっていると認識され始めてきています．「フラクタル」には，このような図形 (フラクタル図形) を用いた科学，という広い意味もあります．

問．虚数だけでなくとも，４乗して -1 となるような数が存在しうる空間は考えることができるのでしょうか？

答．代数学の基本定理から，代数方程式を解くだけなら，複素数の範囲だけ考えれば十分です．たとえば，$(e^{\frac{\pi i}{4}})^4 = -1$ です．

問．背理法の使いどころを教えて下さい．「こういう場合は背理法」という様なパターンがあるのでしょうか？それとも正攻法 (?) でいどんで，できなかった場合の選択肢として頭に留めておくべきですか？

答．パターンはないと思います．証明法の１つとして頭に (心に?どこかに) 留めておいてください．ただし，背理法も立派な正攻法 (の一つ) です！つまり，数学的にまったく正しい方法です．

問．プリントにのっている公式や定理はすべて覚えた方がいいのですか？たとえば，コーシーアダマールの定理は，文を読めば理解できますが，自分で覚えようとすると，どうしても丸覚えになって意味がないような気がします．

答．できれば覚えてください．覚えて無意味なことはありません．ただし，まず簡単な公式を覚えて，そちらを使いこなしてからにしてください．優先順位があります．

問．$a, b, c, \ldots$ は定数，x, y, z は変数とするのは決められているのですか？

答．決められていません．単なる慣習です．ただの慣習なのですが，わかりやすい良い慣習なので，それに逆らわないでみんな従っています．数字の表記法もそうですね．

問．数学を探究することは愛することと同じなのですか？数学に限らず，さまざまな研究を行う上で，その研究をしたいという気持ちがあるから研究するのだと思います．その気持ちというのは，人を愛する心と同じものなのでしょうか？愛と探究心は同一なのでしょうか？

答．探究心も愛の一種です．人を愛するのも愛の一種ですね．でも愛はもう少し広い意味を持っていると思います．たとえば，愛は「自分を生かすことを通して人を生かすこと」という定義ではどうでしょう．人を愛するということも，この定義にあてはまりませんか？それはともかく，探究心については，第一に自分の好きなことを，生き生きと研究しなければいけません．そして，ただ自分が好きなことをすれば良いというわけではなく，歴史的，社会的に価値のあること，人が生き生きとすることにつながっていくことを研究するのがよい，ということになります．ではまた．