数学概論A (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. 5 (２００３年５月３０日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． sup (上限) の説明がよくわからなかったので，もっと詳しく説明してほしいと思いました．

答． おはようございます．さて回答ですが，確かに難しい概念なのですが，上限とは，"上からのぎりぎりの限界" のことです．実数の集まりに対して定まります．$A \subseteq \mathbf{R}$ を空集合でない部分集合とするとき，$\forall a \in A, a \leqq b$ となる数 b を，A の**上界**と言います．A の中のどんな数よりも大きいか等しいという性質をもつ数のことです．上界は，ぎりぎりではない限界も含んでいます．そこで，A の上界のうちの最小数を A の**上限**と呼びます．英語で supremum．(”偉大なる母”とでも覚えてください)．たとえば，$A = [0,1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqq x < 1\}$ について定義をあてはめてみます．区間 $[0,1)$ の中のどんな数よりも大きいか等しいという性質をもつ数は，言い換えると，1 以上の数ということです．なぜなら，1 より小さかったなら，その数を超えてしまうような $[0,1)$ の中の数があるからです．したがって，上界の集合は，$\{b \in \mathbf{R} \mid 1 \leqq b\}$ です．この上界のうちの最小数は 1 なので，上限は 1 です．

問． 複素数も微分できるということですが，複素数にも連続性があるのですか？

答． はい．複素関数にも微分可能性が考えることができます．複素数でも極限の考え方があります．

問． 円周率はどのように考えだされたのですか？// 円周率を世界で一番最初に発見した時の方法はどんなものだったのですか？

答． 実測しているうちに気が付いたのだと思います．近代的な概念でいうと，「実験」ですね．ちなみに，発見されたのは太古のことであり，まだ「個人」という概念は無かったと思います．共同体の知識として，同時発生的に発見され，宗教的な知識として蓄積されていたと思われます．

問． 円周率の π と三角関数で出てくる π は同じものですか？円周や円の面積は値がしっかりでてきそうなのに π を使うと $\pi = 3.14\cdots$ なのできれいに値がでないので変な感じがします．// 数学は必ず答えのでる学問といわれているが，正確な値が出たとは言えないではないか，と思います．

答． 同じものです．円周や円の面積は値がしっかり出てこなくても不思議はありません．なぜかというと，”本当に丸い円”というものは現実には存在しないからです．円はあくまで想像の産物ですね．円満な性格，事態を丸く納める，というのも程度の問題です．**長さや面積は，正確に定義しようとすると「極限値」の考え方がかかわってきます**．当然，円周率の正体も「極限値」なので，きれいに値が出てこなくて当然です．言えることは「円周率の正確な値は π である」ということです．ところで，"数学は必ず答えのでる学問" というよりも，"数学は必ず答えのでるようによく考える学問" ですね．よく考えたら，π は無理数で，循環小数では表されない，という答えが出た，ということです．

問． $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ などは，どこから出て来たものなのでしょうか？// π の他の求め方について，この授業でやったような難しいものではないやり方を知りたいです．

答． それほど難しいものだとは思いませんが... それはともかく，歴史的には円の多角形近似によって近似値を求めました．円に内接 (あるいは外接) する正多角形の辺の長さの和で近似します．辺の数を多くしていけば，好きなだけ精密な近似値が得られます．アルキメデスの方法が，まさにその方法です．内接多角形で近似すると，数値は，少なめです．外接多角形で近似すると，数値は，大きめです (アルキメデス)．

問． $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{239}$ を利用して π の近似値を求められるとありますが，どう利用しているのでしょうか？

答． 講義で説明した $\mathrm{Arctan}(x)$ のべき級数展開に代入して利用します．あー単純 (Arctangent) です．

問． 以前，π について，$3.141592\cdots$ と数十桁以上書いてあるものを見ました．また，どのくらいまで求まっているのでしょうか？計算機だと，数を表すビット数の関係で，有効数字が数桁だと思われます．どのように求めているのでしょうか？

答． ケタ数については，回答書 No.3 を見て下さい．なるほど，計算機の誤差との兼ね合いがあると思いますが，そこは，人間が工夫してプログラムを組めば解決する問題だと思います．

問． 円周率の計算は，とても大変なことではないのですか？円周率の計算は，数学以外の技術も発展させた気がするのですが，どうなんでしょうか？

答． 大変なことです．確かに，数学以外の技術の発展に寄与したのも確かですね．数学が技術を発展させ，技術の発展が数学を発展させる，ということでしょうか．

問． $e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ は，どのように考えたら納得できるのでしょうか？

答． 幾何的に考えたら納得できると思います．$e^{\frac{\pi}{6}i}$ は，ガウス平面上で，1 を角度 $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させて得られる点なので，当然，実部 (x 座標) は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 虚部 (y 座標) は $\frac{1}{2}$ になります．

問． 複素数 z に対して，$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2}, \sin z := \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}$ と定義しましたが，これらはオイラーの公式などを作って確かめれば，その妥当性がわかるのでしょうか？// 複素数の場合には，図形的に考えられるの

ですか？

答． 残念ながら図形的には考えられなくなります．三角関数が成長して遠くに行ってしまったような感じがして少し寂しくなりますが，我慢しましょう．それはともかく，オイラーの公式から，z が実数の場合は，従来の三角関数と一致するということがわかります．そのとき，一般の複素数に対しても三角関数を定義できないだろうか，と考えることは自然なことだと思います．その際，三角比の意味がなくなるけれど，指数関数との関係から，同じ式で定義するのが，やはり一番自然なのではないでしょうか？実は，この発想の背景には，解析関数の**一致の定理**があります.「２つの正則関数 $f(z)$ と $g(z)$ がある点に収束する点列の上で一致していたら，その点の近傍上で一致してしまう」という定理です．この定理によれば，$\sin z$ や $\cos z$ を正則関数として定義するなら，もうこれしかない，ということが保証されます．

問． $e^{ix}e^{iy}=e^{ix+iy}$ とできる時点で，$e^{i(z+w)}=e^{iz}e^{iw}$ は自明なのでは？

答． $e^{a+bi}=e^ae^{ib}$ も認めればそうです．でも，そうすると，一般の複素数について指数関数を認めるのと同じことになります．

問． 逆三角関数がよくわかりません．y と x を入れ替えたりしているうちに，結局 x,y が何を表しているのかわからなくなります．どうすれば混乱しなくなるのですか？

答． 乱暴に扱うと，僕 (石川) も混乱します．慎重に扱うしかありません．

問． 逆三角関数の書き方が統一されていないのはなぜですか？統一したほうが便利でわかりやすいと思うのですが.

答． 確かに統一したほうが便利ですね．歴史的な経緯でまだ統一されていないということだと思います．ところで，世界中の言葉も統一した方が便利でわかりやすいと思いますが，なぜ統一されていないのでしょうか？

問．「$y=ae^x \Rightarrow y'=y$ はわかりますが,「$y'=y \Rightarrow y=ae^x$」は成り立つのでしょうか？

答． 成り立ちます．理由は,「解の一意性 (uniqueness)」です．安心してください．

問． なぜ，$\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ となるのですか？

答． べき級数展開を使った証明は，講義で説明した通りです．加法定理を使った別証明は，$\dfrac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\dfrac{\cos h-1}{h}-\sin x\dfrac{\sin h}{h}\right)$ で，$\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0, \dfrac{\sin h}{h}=1$ から，$\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ がわかります．

問． 三角関数や e,π,i の関係がやけに上手にできていると思うのですが，これらはそうなるように仕組まれたのですか？

答． 誰が仕組んだはわかりませんが，**人間が自然を理解しようとして読み取った自然からのメッセージ**であると考えれば，納得がいくと思います．

問． 日本人 or 女性で有名な数学者はいないのですか？

答． 沢山います．エミール・アルティンとかコワレフスカヤは有名ですね．ともかく，数学に国境も性別も関係ないと考えると良いと思います．

問． 一般に公式というのは覚えるべきですか？

答． 正確に覚えられるなら，もちろん覚えて損はないです．それよりも，覚え方のほうが重要です．いわゆる「丸暗記」が一番まずいやり方です．一番忘れやすいからです．他のこととつなげて関連付けて覚えるとよい，と言われています．さらに，数学では「導き方を覚えておく」という方法があります．そうすると，その公式を思い出せなくても，関連する知識から導くことができます．また，公式を間違って覚えていても，自分で気付いて訂正することができます．つまり，導き方を覚えておくほうが安心だし，他に応用がきくので，丸暗記よりずっと強力です．たとえると，**知識が網状に縦横無尽につながっている**，というのが理想の状態です．一部分が壊れたり切れたりしても，修復できるからです．ところで，皆さんは好きな異性の名前を覚えようとしますか？多分，知らないうちに覚えてしまうと思います．要するに，愛の問題ですね．

問． 普段の生活の中で，虚数を扱わなくて済んでしまうのは何故だと思いますか？

答． なるほど，そう思うのは当然ですね．でも，済むかどうかは，将来にわたって皆さんが普段どういう生活をするかによります．このことは，虚数の i でも，本当の愛についても，まさに同じです．普段の生活の中で，愛がなくても済んでしまうのは何故か？愛のない味気ない生活もできるからです．それはともかく，現代社会に住まないで，原始時代に住むなら虚数を扱わなくて済むけれど，この情報化社会では，虚数 i を扱わなくては済みません．日常生活の至る所で，虚数が使われているからです．たとえば，皆さんが大好きな (!?) 携帯電話 (ちなみに，僕 (石川) は持っていませんが) の中は i だらけです．つまり，虚数を使った電磁気学や量子力学の成果の凝縮が携帯電話です．そのことを皆さんが気付いていないか，あるいは，普段は意識していないだけです．それに，将来もし虚数を扱わないでは済まなくなって皆さんが困ったとしたら，教師の立場として,「すまなかった」では，済まされません．重要なことは，皆さんにお伝えする義務があります．気付かないから教えないでおこう，というのは，健全な社会の姿とは言えません．もちろん，教わったあとは，それを受け止める皆さんの意志の問題になります．愛と意志が重要ということですね．ではまた．