数学概論A (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. ４ (２００３年5月１６日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問．微分方程式とはどういったものなのでしょうか？// 現在，応用数学 I という講義で，数多くの微分方程式を解く練習をしていますが，何故これほどまでに e が登場するのでしょうか？

答．おはようございます．北海道のさわやかな季節が来ようとしていますね．いかがお過ごしですか？愛のある生活をしていますか？さて回答ですが，なぜでしょうね．微分方程式というのは，微分 (導関数) の入った方程式のことです．その方程式をみたすような関数をすべて見つけたい (すなわち解きたい) わけですが，一番簡単な方程式の解が，一般の場合の解法にかかわってくるということは容易に想像できると思います．では，一番簡単な微分方程式は何か？それは，$\dfrac{dy}{dt} = f(t)$ と $\dfrac{dy}{dt} = y$ です．最初の方程式を解くということは，すなわち，$f(t)$ の原始関数 (不定積分) を求めることで，このことは，微分積分学の基本中の基本です．一方，二番目の方程式の解は，$y(t) = Ce^t$ です．(C は任意定数．初期値を与えると特定される)．これが，数 e の重要性の根源だと思います．このように，微分方程式の解に e が登場するのは自然なことだと思います．

問．$y = e^{at}$ とおいたとき，$y(0) = y_0$ に対する解が $y(t) = y_0e^{at}$ で与えられるとはどういうことですか？

答．$y(t) = y_0e^{at}$ に対しては，$\dfrac{dy(t)}{dt} = y_0\dfrac{de^{at}}{dt} = y_0ae^{at} = ay_0e^{at} = ay(t)$ および $y(0) = y_0e^0 = y_0$ が成り立つということです．それはそうと，指数関数 e^t を，べき級数を使わずに，微分方程式 $y' = y$ の解であって, 条件 $y(0) = 1$ をみたすもの，と定義する導入の仕方もあり得ますね.

問．微分方程式に複素数を導入する意義は何ですか？

答．導入した方が簡単だからです．例として，２階の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -y$ を考えます．実数の範囲でいうと，$y(t) = \cos t$ が解，$y(t) = \sin t$ も解で，１次独立なので，一般解は $y(t) = a\cos t + b\sin t$ (a, b は任意定数) となる，と説明できます．しかし，一般論の流れでいうと，“特性方程式” $D^2 + 1 = 0$ を解いて，$D = \pm i$，したがって，一般解は，$y(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$ (A, B は複素数の任意定数)，とするのが，より簡単です．後は実数条件から，(オイラーの公式を使って) 解の形を決めていけば良いだけ，というわけで，代数方程式に複素数を導入するのと同じように，微分方程式に複素数を導入するのもごくごく自然な発想，意義深い発想だと思います.

問．$e^{z+w} = e^ze^w$ を証明するところで，$\sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\dfrac{z^m}{m!}\dfrac{z^\ell}{\ell!}$ を，$m\ell$ 軸のグラフの n までの範囲で “ななめにとる” というのがあまりピンときませんでした．// 式の変形の途中がわかりません．// t_nu_n からの展開式がわかりません．// $\left(\sum_{m=0}^{n}\dfrac{z^m}{m!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\dfrac{z^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\dfrac{z^m}{m!}\dfrac{z^\ell}{\ell!}$ がよくわかりません.

答．具体的に説明します．$t_2u_2 = (1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!})(1+\dfrac{w}{1!}+\dfrac{w^2}{2!})$ ですが，これを展開して，$1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{w}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z}{1!}\dfrac{w}{1!}+\dfrac{w^2}{2!}+$(3次以上の項) となります．そこで，$\dfrac{z}{1!}+\dfrac{w}{1!} = \dfrac{z+w}{1!}$ とか，$\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z}{1!}\dfrac{w}{1!}+\dfrac{w^2}{2!} = \dfrac{z^2+2zw+w^2}{2!} = \dfrac{(z+w)^2}{2!}$ とか変形していくというのが，証明で行っている変形です．“ななめにとる” というのは，言い換えれば “次数でそろえる” ということです．Σ の式を使っていますが，単に展開した式をまとめて表しているにすぎません.

問．指数法則の証明で，なぜ e^{z+w} だけ特別な証明になるのですか？ふつうの指数法則 (例えば，2^{3+4} など) は，そんな風に証明されていない.

答．指数が自然数なら良いのですが，一般の複素数 z に対して，e^z を定義したからです．べき級数を定義したからです．だから，べき級数の計算によって証明したわけです.

問．$e^{z+w} = e\times e\times e\times\cdots\times e$ ($z+w$ 個) $= (e\times e\times e\times\cdots)\times(e\times e\times e\times\cdots)$ (z 個と w 個) $= e^z\times e^w = e^ze^w$ ではいけないですか？

答．いけません．z や w は，一般の複素数なので，“z 個” といっても意味がありません．たとえば，i 個は，女性の名前 (愛子) 以外の意味はありません.

問．複素数で，とてつもなく大きい数字 ∞ というものはないのですか？たとえば $z = -\infty + 3i$ というのが存在するならば，$e^{-\infty+3i} = 0$ というふうにはならないのですか？ということは，やはり $z = -\infty + 3i$ は存在しないのだろうか？

答．存在しません．∞ というのは，数列の状態や関数の状態を表すただの記号であって，数ではありません．実数の中にも，複素数の中にも，∞ の居場所はありません．たとえると，∞ は人間ではなくモンスターだ，(早く人間になりたい!) ということです.

問．$\sum_{n=0}^{m}$ で m が ∞ だったらどうなるのですか？

答．$\sum_{n=0}^{m} c_n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m$ という記号であり，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + c_1 + c_2 = \cdots$ (無限和) という記号の意味です．無限和は，部分和の極限値というのが定義でしたから，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} c_n$ ということです．$\sum_{n=0}^{m}$ はただの有限和ですが，$\sum_{n=0}^{\infty}$ は極限が関わってきます．たとえると，$\sum_{n=0}^{m} c_n$ は人間だけど，$\sum_{n=0}^{\infty}$ になるとモンスターに変身します.

問．e^t を微分すると，級数の後ろの項が一つ足りなくなるのですが，気にしなくてよいのですか？

答．気にしなくてよいです．どうしてかというと，項が無限に続くからです．無限に続くから，１つずれても同じになります．ところで，皆さんは,「ヒルベルトホテル」を御存じですか？ヒルベルトさんが経営するホテルには，無限に部屋があります．満室の場合でも，新しいお客さんが来ると，１号室の客を２号室に移し，２号室の客を３号室に移し，３号室の客を４号室に移し，という具合に，１号室を開けて，受け入れることができます．これが無限の特徴，“無限マジック” です.

問．無限とは，どうとらえればよいのでしょうか？たとえば，前年度の伸びの $\dfrac{1}{2}$ だけ成長する木があるとして，最初が 1 m で，$\dfrac{1}{2}$ m のびたとすると，いつまでたっても 2 m にならないというのが本当なのに，極限をとると 2 m と

いうのが解になりますね．少し変な感じがします．

答． 極限は，あくまで「極限」であるので，これで良いわけですね．類似語に「上限」があります．永遠に到達できないけれど，そこにどんどん近付いていく，理想の値，それを考えられるというのは，人類の偉大な英知です．

問． $e^h = 1 + \dfrac{h}{1!} + \dfrac{h^2}{2!} + \dfrac{h^3}{3!} + \cdots$ から $\dfrac{e^h - 1}{h} = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{h}{2!} + \dfrac{h^2}{3!} + \cdots$ とありましたが，自力で導けませんでした．

答． $e^h = 1 + \dfrac{h}{1!} + \dfrac{h^2}{2!} + \dfrac{h^3}{3!} + \cdots$ から $e^h - 1 = \dfrac{h}{1!} + \dfrac{h^2}{2!} + \dfrac{h^3}{3!} + \cdots = h(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{h}{2!} + \dfrac{h^2}{3!} + \cdots)$ となるので，両辺を h で割ればよいです．

問． $e^{\pi i} = -1$ となるのが不思議です．

答． 不思議に感じるのは自然だと思います．では，どうして成り立つのか．そこに，i とは何か？e とは何か？そして π とは何か？ということが隠れていて，要するに，これらの本質からの帰結である，ということだと思います．それを講義で説明していく予定です．乞う御期待．

問． $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$ というのは，どういうときですか？// $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$ のときは，振動する場合が考えられるから "微妙" なのでしょうか？// $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$ ならば "微妙" という部分を詳しく説明してください．

答． 振動することもあるし，収束することもあるし，無限大に発散することもあります．たとえば，$c_n = (-1)^n$ なら，$\sum c_n$ は振動します．$c_n = (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$ なら，すでに述べたように (プリント 4.2) $\sum c_n$ は収束します．また，$c_n = \dfrac{1}{2n+1}$ なら，$\sum c_n$ は無限大に発散します．これらの例では，すべて，$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$ が成り立っています．ここで，あくまで「極限値」によって判定していることに注意しましょう．このように，微妙だ，と言ったわけです．

問． 絶対収束する条件はどうなるのですか？

答． c_n を $|c_n|$ に変えても，プリントの判定法は同じになります．同じ判定法が適用されます．

問． $n - \varepsilon$ ($\varepsilon - \delta$) 論法は理解に苦しみます．どうイメージしたら明確に把握できる様になるのですか？

答． $n - \varepsilon$ ($\varepsilon - \delta$) 論法は実はとても簡単です．「収束」とか「極限値」を明確にするための論法が $n - \varepsilon$ ($\varepsilon - \delta$) 論法です．それはともかく，$n - \varepsilon$ 論法は，対話形式で考えると理解しやすいです．たとえば，「収束」するとは，「うるさい顧客 (上司，親) が満足する」と説明できます．いま数列 a_n が，第 n 期の皆さんのサービス度 (業績，成績) を表しているとして，目標の数値を $\alpha = 100$ とします．$\lim_{n\to\infty} a_n = 100$ ということは，a_n の極限値が 100 ということですが，これは，別に，$a_n = 100$ にならなくてもよい．100 にどんどん近付いていけばよい．でも，うるさい顧客 (上司，親) は，その説明では満足しない．うるさい顧客 (上司，親) は，許容される範囲を設定します．$\varepsilon = 5$ として，n を大きくしていったときに，a_n が 95 から 105 の範囲におさまっているかチェックするわけです．大丈夫！と皆さんは答えます．でも，うるさい顧客 (上司，親) は，じゃあ，$\varepsilon = 1$ として，n を大きくしていったときに，a_n が 99 から 101 の範囲におさまっているかチェックします．大丈夫！と皆さんは答えます．でも，でも，うるさい顧客 (上司，親) は，皆さんが，99.5 あたりでさぼっていないか，と考えて，$\varepsilon = 0.01$ と設定します．$n - \varepsilon$ 論法は「かけひき」です．このように，**任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分大きな番号から先の a_n が，$\alpha - \varepsilon$ と $\alpha + \varepsilon$ の間にある，というのが，「収束」の定義です**．

問． e^θ の図形的イメージ (回転) はわかりやすいですが，e^r の図形的イメージ (拡大縮小) を同じぐらいわかりやすく考える方法はありませんか？

答． r, s が実数の場合の指数定理 $e^{r+s} = e^r e^s$ は，やはり数直線で考えるしかないと思います．

問． e^0 や実数の 0 乗のうまい解釈の仕方があれば教えて下さい．

答． $e = e^{0+1} = e^0 e^1 = e^0 e$ から，これはもう，$e^0 = 1$ しかないですね，という説明があります．また，$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e} \to 1 (n \to \infty)$ だから，$e^0 = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ という説明ができます．

問． 微分の表し方はいろいろありますが，違いは何ですか？

答． y' とか $\dot{y}$ とか $\dfrac{dy}{dt}$ とかありますが，違いはありません．数学の実体はただ一つです．

問． $\dfrac{dy}{dt}, \dfrac{d^2y}{dt^2}$ はどう読むのですか？

答． ディーワイ over ディーティー，ディーツーワイ over ディーティーツーと読むのが良いと思います．これだと国際的にも通用するからです．英語の表現としては，もっと正確な (長ったらしい) 言い回しがあると思いますが，通じる表現のうちで最も簡単な表現で良いと思います．

問． デデキントの切断のことを教えて下さい．

答． 有理数から実数を構成する厳密な方法です．有理数の全体の集合 $\mathbf{Q}$ を２つの部分 A, B に分けます：$\mathbf{Q} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. ただし，$A$ の中のどんな数も，B の中のどんな数よりも小さいという条件と，A に $\mathbf{Q}$ の中での最大元があってもよいが，B に $\mathbf{Q}$ の中での最小元はないという条件を満たすように分けます．このように $\mathbf{Q}$ を２つに分割したものを，**デデキントの切断**と言います．この切断一つ一つが，一つ一つの実数を定まるというのが，デデキントによる実数の構成です．

問． 回答の中の「10 進法の慣習は人間の指が 10 本だったからである」から日常生活の法則を色々ふり返ってみました．一週間が 7 日なのは聖書から．一月が 31 日なのは月の運行．では，何故コンピューターは２進法なのですか？

答． 2 進法が一番簡単だから，だと思います．

問． 今やっている複素数や微積分，複素数の微積分などは身の回りのものに応用されたりしているのですか？

答． 応用されています．皆さんが毎日身近で使っている電気・通信関係の製品は，すべて複素数と微積分を使った理論をもとに作られています．便利な言葉であると同時に，世界の本質をついた数学的対象であるとも言えます．

問． 演習問題の答は教えてもらえるのですか？

答． 教えません．テストで答を教えたらつまらない，それと同じように，レポート問題の答を教えてしまったら，つまらないからです．でも，質問は大歓迎なので，質問書とは別に，問題を自分でどんどん解いてから，どんどん質問しに来てください．ではまた．