数学概論 A (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. 3 (2003年5月2日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. e^z とは何ですか？ // e^z が $1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots+$ となぜ定義されるのか不思議です. // なぜ，指数関数や三角関数をべき級数の形で表すことになったのですか？誰が最初にやろうとし，どうしてやろうとしたのですか？

答. おはようございます. さて回答ですが，べき級数を使い始めたのはニュートンです. 彼が，自分の力学 (ニュートン力学) を完成させようとして微積分を創り,「べき級数を使うべき」と言ったかどうかは知りませんが，彼が使い出しました. e^z を上のようなべき級数で表現しておくと，$(e^z)'=e^z$ が一目瞭然になるというメリットがあります.

問. e の定義から，e は実数であるので，e^2, e^3 などは定義されているはずです. すくなくとも n が整数のときに，$e^n=1+\dfrac{n}{1!}+\dfrac{n^2}{2!}+\dfrac{n^3}{3!}+\cdots+$ を確かめてから「一般に...」と話を進めないと少し気持ちが悪いです.

答. なるほど. それが正攻法です. 実際，e^z を，z が自然数の場合に定義し，次に z が整数の場合に定義し，次に z が有理数の場合に定義し，次に z が実数の場合に定義し，最後に z が一般の複素数の場合に定義する，というのが通常のやり方です.「気持ちが悪い」という気持ちは良くわかります. でも，この講義は,「愛ではじまる」ということで，一般の複素数の場合の e^z からさかのぼって微積分を見直していこうという主旨です. 最後には，納得してもらえると確信しています.

問. 虚数乗するというのはどういうイメージですか？

答. e^z を，z が実数の場合と，z が純虚数の場合に分けてイメージするとよいと思います. z が実数の場合は，普通の (高校で習った) 指数関数のイメージで良いです. z が純虚数，つまり，$z=i\theta$ という場合は,「角度 θ の回転」という，新しいイメージ，**かつての指数関数に抱いていたイメージとは全く別の一面がある**，と理解すると良いと思います.

問. e は高校のときは，自然対数で log のときに使用していたのですが，ここでは，$e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+$ と定義していますが，どちらが先に出てきた考え方なのですか？どれとも，どちらも同じことをいっているのでしょうか？// 複素数を考えていくうえで，この考え方が必要とされるのでしょうか？// π は面積や体積を求めるために用いられていますが，e とはどういう目的で定められた数なのですか？// e は何のために考え出されたのですか？i と同様，方程式を解くためだったのでしょうか？// 普通の生活をしていれば関係のないものに思えてなりません.

答. 同じことを言っています. 複素数を考えるとき，$z=re^{i\theta}$ という表示は不可欠で，そのために，e^z を定義しなければいけないのですが，それは，(講義で説明するように) べき級数で定めるのが一番すっきりします. すると，そもそも数 e も，級数で定めておくのが一番良い，ということになります. もちろん，どのように導入したとしても，皆同じ数になります. e が考え出された最大の動機も，i と同様に，方程式を解くためなのですが，方程式は方程式でも,「微分方程式」を解くためです. 微分方程式 $y'=y$ を解こうとすると，どうしても，e という数が必要になります. ところで「普通の生活」という意味が良くわかりませんが，たとえば，僕 (石川) は普通の生活をしていますが，e とはいい関係でつきあっています. それはともかく，現代社会で生活する以上，絶対に e とは関係がない，と避けてばかりはいられません. 実際，物理でも，化学でも，統計でも，金融でも，少し勉強すると，必ず e が使われてきます. e は微積分の中の基本中の基本なので，この際，良く理解しておくことをぜひお勧めします.

問. 「上に有界」の意味の説明が欲しいです. // 上界と上限の概念がわかりません.

答. 数列 a_n が**上に有界**とは，ある数 M が存在して，任意の番号 n に対して，$a_n \leqq M$ となるということです. 言い換えれば，任意の番号 n に対して，$a_n \leqq M$ となるような数 M が存在するということです. 上界とは，このような数 M を全部集めた集合のことを言います. その上界のうちの最小数を上限といいます. つまり，ぎりぎりの上界,「上界の限界」で「上限」というわけです.

問. どうして s_{2m+1} は上に有界とわかるのですか？

答. $s_{2m+1}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots+\dfrac{1}{4m+1}-\dfrac{1}{4m+3} \leqq 1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}-\cdots-\dfrac{1}{4m+1}+\dfrac{1}{4m+1}-\dfrac{1}{4m+3}=1-\dfrac{1}{4m+3} \leqq 1$ なので，$M=1$ ととれば，上に有界であることがわかります.

問. $s_{2m} \leq s_{2m+1}$ という部分和も極限をとると同じ値になるということですか？

答. その通りです. 異なる数列でも極限値が同じになることがあります.

問. 「極限値」と「収束」という概念がよくわかりません.

答. 数列 s_n が数 s に「収束する」と言うのは，番号 n を増やしていくと，s_n が s にどんどん近づいていくということです. 昔の人は「収斂 (しゅうれん) する」と言っていました. そして，その収束先の数 s のことを「極限値」(limit) と呼びます.

問. 「無限」という概念はどんな所で活用されているのですか？

答. いろいろな所で活用されています.「無限」を活用する可能性はまさに無限大です. その中で，一番基本的な無限は，やはり，自然数が無限個あるということだと思います. どうせ一生使わないような巨大な数を考える

必要が本当にあるのか，有限個の自然数だけで本当は事足りるのではないか，といった,「無限」を認めない発想はしばしば聞く考え方です．でも，たとえば，1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000までの数だけ考える．これより大きな数を考えることは絶対禁止，考えた者は処罰される，というのは，どう考えても不健全な状況ですよね．無限を考える，考えられる，というのは，非常に健全で自然で，人類の偉大さの現れだと思います．

問． 絶対収束の意味がよくわかりません．$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+$ は収束しないということですか？// 項を入れ換えたら云々ということでしたが，よくわかりません．

答． そうです．$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+$ は収束しません．絶対収束しない場合は，その級数自体は収束したとしても，項を入れ換えた級数は収束しなくなったり，別の極限値を持ったりと，変なことが起きる，ということです．

問． e が無理数と証明できたとしても，実際に数字で表されていないと信用できない気がします．何とか納得できる方向なないでしょうか？

答． 実際に小数展開したら無限に続く，循環小数でも無理，ということが無理数である意味なので，それが論理的に証明されたわけで，数字で表されないと信用できない，と言われると非常に困るわけです.「愛情を数字で表せ」といわれると困るのと同じように．

問． $\lim_{t\to\infty}\frac{t^r}{e^t}=0$ となるのはなぜですか？

答． たとえば，“ロピタルの定理により” という説明がありますが，この講義の筋に沿った説明をすると，r が 自然数 n の場合は，$0<t$ のとき，$\frac{e^t}{t^n} \geqq \frac{1}{t^n}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}) = 1+\frac{1}{1!t^{n-1}}+\frac{1}{2!t^{n-2}}+\frac{1}{3!t^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{t}{(n+1)!})$ なので，$t\to\infty$ とすると，右辺が $\to\infty$ なので，$\frac{e^t}{t^n}\to\infty$ となります．したがって，$\frac{t^n}{e^t}\to 0$ です．一般の r については，r 以上であるような自然数 n をとれば同様です．

問． $\lim_{h\to 0}$ によって最後に h に 0 を代入してしまうことに矛盾を感じます．

答． なるほど．でも，単純に $h=0$ と置いているわけではなく，あくまで，$\lim_{h\to 0}(A+B)=\lim_{h\to 0}A+\lim_{h\to 0}B$ のような一般論と，$\lim_{h\to 0}h=0$ という定理を使って導いているのです.「$h=0$ ではなく，h の極限が 0」 ということです．誤解のないように．

問． $0!=1$ になるのは不思議です．

答． これは，あくまで記号の約束です．しかし，$n!=n\cdot(n-1)!$ が成り立つので，$n=1$ の場合も，$1!=1\cdot 0!$ が成り立ように記号 $0!$ を定めたい，すると，これはもう $0!=1$ しかないですね．

問． $\frac{p}{q}$ $(p,q$ が正の整数$)$ で表されるのが有理数という定義でよいのですか？

答． そうですが，正確に言うと，$\frac{p}{q}$ $(p,q$ が整数, $q\neq 0)$ と表されるものが有理数です．(負の有理数もあるので)．その上で，正の有理数の場合は，p,q 両方を正に選ぶことができるということです．

問． 「級数」とはどうしてこのような日本語になったのですか？

答． 「series」の訳ですが，なぜ「級数」なのでしょうね．わかりません．答えに窮す (きゅうす)．

問． e と π はどちらのケタ数が多く分かっているのですか？

答． 知りません．でも，π の方がまだ “メジャー” で，一般の人々の関心が高いので，π の方がより多く計算されていると想像できます．π の場合，計算機の性能を証明するのが，π の小数展開を計算するもともとの動機のようです．ただし，数学的には，何ケタまで計算した，といったことはあまり意味がありません．もともと，１０進法で記録するという慣習も，人間の指が１０本だったという偶然によっているので，必然性は少ないですね．現代では，２進法で何ケタまで計算したか，というそのケタ数を２進法で表すのが良いのでは，といった過激な意見もありえます．

問． 「公理」とは何でしょうか？みんなが認めているあたりまえのこと，という意味でしょうか？

答． そうです.「おおやけのことわり」です．ただし,「あたりまえ」というとやや不明確なので,「みんなで認める大前提」あるいは「ゲームのルール」といった方がより明解になると思います．スポーツなどのゲームのルールは，もちろん自然発生的に生まれたものも多いですが，そのゲームを面白く楽しくするために人為的に定めた部分もあります．数学の公理も，それと基本的には同じことです．大切なのは，公理に「無理がない」(お互いに矛盾するルールがない) ということと,「無駄がない」(不必要なルールがない) ということです．

問． 「インド数学」には，そもそもどのような視点や概念があるのですか？

答． 0 の概念があります．0 が最初に発見されたのがインドだそうです．詳しくはわかりませんが，インド哲学からの視点だと思います.「零の発見」という本が岩波新書がら出ていますが，今は絶版かも知れません．その他に，インドの数学と言うと，ラマヌジャンという神秘的な天才数学者が有名です．また，現代インドは，数理科学や IT 化の分野では，世界的に最先端です．その原動力は，インドでは，小学校で「九九」ではなく,「19×19」までの計算を覚えさせるからだ，と言われています．何ごとも “基礎を徹底的に身につけるのが大切”．何ごとも 0 から始めるのがインド，ということですね．お後が宜しいようで．ではまた．