数学概論 A (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. 2 (２００３年４月１８日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. 三角関数と複素数ではどちらからどちらが派生したと考えるのがよいでしょうか？

答. おはようございます．さて回答ですが，よい質問ですね．オイラーの公式 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ の意味あいに関する質問ですね．歴史的には，明らかに三角関数が先です．でも,「論理的」にすっきり説明できるのは，複素数の方です．この講義では，その両面から説明したいと思っています．

問. 具体的にはどういったことで複素数が微積分に役立つのか教えてください．

答. これについても講義を通して説明しますが，たとえば,「留数」と呼ばれるものが複素数の解析から出てくるのですが，その留数を応用して，難しい定積分の計算が簡単にできる場合があります．

問. 複素数平面を考え出した人はすばらしいです．複素数平面を考え出したのは誰なのですか？

答. 同感です．すばらしいと思います．複素数を考え出したのは，多分，ガウス (Gauss) だと思います．その関係で，複素数平面をガウス平面とよぶこともあります．ところで，複素数平面は,「複素平面」とも呼ばれます．ただ，この呼び方だと，実平面に対して複素平面，つまり，$\mathbf{R}^2$ に対して ($\mathbf{C}$ ではなくて)$\mathbf{C}^2$ の方を意味することもあるので，注意が必要ですね．($\mathbf{R}$ は実数全体，$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す記号です)．

問. 複素数平面をベクトルで考えるコツを教えてください．

答. 基本的に $z = x + yi \Leftrightarrow (x, y)$ という対応をおさえておけば大丈夫だと思います．

問. 複素数と線形代数学のつながりはどんなものでしょうか？

答. 複素数はベクトルとみなされ，ベクトルの話は当然，線形代数と関係します．複素数平面をベクトル空間とみると実２次元です．

問. 複素数の商の説明が理解できませんでした．$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = 1$ から $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{x_1^2 + y_1^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ まではわかるのですが，$\dfrac{1}{x_1 + y_1 i} = \dfrac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} i$ の部分がわかりません．

答. 複素数の場合も**逆数**を，$\dfrac{1}{x_1 + y_1 i}$ と書きました．逆数の定義は，その数に掛けたら 1 になるもの，ということなので，$x_2 + y_2 i$ が $x_1 + y_1 i$ の逆数になります．

問. 複素数 z について定義される絶対値 $|z|$ は計算でなく具体的に理解しづらいです．

答. 複素数平面を考えると，原点からの距離として理解しやすいと思います．これから説明していきます．

問. 授業では，$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ という公式が出てこなかったのですが，演習問題２では，これを使って，$(zw)(\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$ としていいのでしょうか？

答. なるほど！もちろんよいです．$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ をまず示しておけば完璧です．(直接計算するよりも，$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ を確認して使う方がセンスがよいかもしれません)．ところで，$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ の公式は基本的であり講義で説明すべき式なので，さっそく授業で取り上げることにします．Thank you!

問. 複素共役とノルムの関係において，$\sqrt{x^2 + y^2}$ が先ですか，それとも $\bar{z} = x - yi$ が先ですか？

答. 確かに，講義では複素共役を使って，ノルムを定義しましたが，複素共役を持ち出さなくても，(複素数平面での原点からの距離として) ノルムは自然に定義できます．ですから，どちらが先というより，どちらも重要で独立なものであると考えればよいと思います．

問. “共役” は “きょうやく” と読むのですね？

答. そうです．少なくとも，数学では “きょうえき” とは呼びません．ところで，関係ないですが，a' を日本では「a ダッシュ」と呼ぶ人が多いようですが，英語圏では,「a プライム」と呼びます．

問. ２次方程式の解の公式は，“複素数係数” でも適用できますか？

答. できます．複素数では，代数方程式の解法が，その中で “完結” しています．

問. ４次以上の方程式の解の公式はないのですか？

答. 4 次まではあります．でも，５次以上の代数方程式の解の公式はありません．アーベル (Abel) やガロア (Galois) という人々によって解の公式が存在しないことが証明されています．

問. 複素数を使って立体空間を表すことができますか？

答. なるほど．当然考えたくなりますね．確かに，表そうと努力した人がたくさんいます．でも，難しいようです．

問. ハミルトンの「４元数」とはどんなものですか？

答. 複素数が実数の２つの組で表されるのに対して，４元数は，実数の４つの組で表されるものです．４元数の場合，虚数単位に該当するものが３つあります．i, j, k と書きます．そして，４元数は，$x + yi + uj + vk$ という形で表されます．

問. 複素数平面があるならば，ハミルトンの４元数で作られる空間もあるのですか？

答. あります．ベクトル空間としては，$\mathbf{R}^4$ です．

問. 今日配られた「質問に対する愛の回答」で “$\log i$” が気になりました．対数の真数は正でなければならないはずなのに，虚数 i をもってきてもよいのでしょうか？

答. なるほど．実数の範囲では $\log x$ に入る x は正の数でなければなりません．それは確かなのですが，対数関数は，複素数に対しても (多価関数) として定義されるのです．その意味で，$\log i$ というものをとらえています．後で授業で，関数 $w = e^z$ と定義するのですが，それを逆に解いたものが，$z = \log w$ なのです．

問． $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ はどのようにして求められるのでしょうか？// $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となるのはどうしてですか？

答． これも講義で説明します．深いストーリーがそこに隠されています．

問． なぜ $x + yi = z$ とおく慣習ができたのですか？

答． 詳しく知りませんが，x, y の次の文字 z を使ったということだけだと思います．

問． 複素数の "複" とはどういった意味合いなのですか？

答． 複素数は「複素」「数」と読んでください．複素は complex，複数の素 (もと，実部と虚部) からできている数という意味です．

問． 微分のとき用いられる dy, dx は $\Delta y, \Delta x$ とは何が違うのでしょうか？

答． Δx は変数 x を変化させたときの変化量，Δy は x を $x + \Delta x$ に変化させたときの y の変化量です．一方，dy, dx は，その Δx をどんどん小さくしたときの極限の量を表しています． $\dfrac{dy}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ です．

問． 関数の微小的変化ということがわからないのです．

答． (文学的に答えてみます)．少年は旅に出た．列車の窓から遠くの景色を見て思い出に耽っている．ふと，線路にそった電線に気付く．窓のすぐそばを電線が走る．列車のスピードが速いので，電線は実際は曲線 (懸垂線) を描いているのに，一瞬一瞬，電線は直線に見える．しかも，その直線の傾きが刻々変化する．少年は,「これが微分というものだ」と思った．その直線の傾きも関数のグラフとして表す，というのが，導関数のアイディアなんです．わかりましたか？

問． π が何なのかはわからないで使っているのは恐ろしい気がする．

答． 同感です．円周率に関しては，後で講義で詳しく触れると思います．

問． ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)$ はどんな意味があるのですか？教科書よりも簡単に教えて下さい．

答． "座標変換による面積の増大度" です．それで，面積の計算なとの重積分の計算の際に考慮に入れる必要があるわけです．

問． オイラーや，コーシー，フーリエなど外人の数学者の名前ばかりですが，日本人で活躍した人はいないのでしょうか？

答． たくさんいます．ただ，現代の数学がもともと西洋で誕生したので，皆さんが習うような基本的な定理に限ると，ほとんど西洋の人が発見した，ということになってしまうだけです．単なる歴史的因縁のせいです．

問． ２次方程式の解の「公式」というと普通中学生でも知っているわけですが，自分は中学時代どうしてもこの「公式」が覚えられませんでした．理由は唯一つ，覚えるより解く方が楽だったからです．先生は「公式」というものに対して，どのように対処するのが良いと思いますか？

答． 共感を覚えます．私 (石川) も覚えられませんでした．公式は，実際に何度も使ってみる，というのが良いと思っています．

問． 大学での数学が，実際に数理科学と結びついているのか教えてください．今後２１世紀は，どのような数理科学が発展されると予想されますか？

答． 結びついています．実際，いま習っている微積分学は，すべての数理科学の基礎になっています．逆に言うと，微積分学を知らないと，どうしようもない，ということです．どのような数理科学が発展するか予想するのは難しいですが，いままで，数学とはあまり関係なかった分野が，数理科学として発展すると考えられます．たとえば，脳や心の研究，金融 (これはすでに発展していると思いますが)，さらには，福祉，政治などの社会科学でも (コンピュータ化以外の) 数理科学の応用があり得ます．

問． 微分積分は経済学に必要な学問だと聞きました．

答． その通りです．必要です．とくに,「偏微分」が必要です．関数の極大・極小問題と解くのが経済学では基本的な方法だからです．

問． 数学を学ぶことの意義は何ですか？

答． 将来，直接に数学を使う人にとっては，数学の意義は明らかだと思いますから，将来数学を直接使わない人にとっての意義が問題になりますね．それは**ものごとを整理し理解して，明確に説明する能力を身につける**ためです．ですから，その能力を増大させるように学ぶことが大切だ，というわけです．１つの問題でよいから，よく理解して，人に説明できるように意識して勉強するとよいと思います．

問． 数学を好きになるにはどうしたらいいですか？

答． とりあえず演習問題を自分で解くのがよいと思います．自分で一応解いてみる，ということが大事です．あるいは，何か，教科書以外の数学の本 (薄いもので OK) を読んでみると自信がついて数学が好きになると思います．

問． 数学の歴史の本でお奨めなものはありませんか？

答． たくさんあります．(大学生協や JR タワーの旭屋あたりの) 書店でさがすと，自分の好みのものが見つかると思いますが，私 (石川) は，高木貞治「近世数学史談」共立出版や「アーベルの生涯」東京図書,「ヒルベルト」岩波書店，などの伝記物が好きです．

問． 演習問題は授業中に解答することはないのですか？

答． 解答することもあると思います．でも，その場合は，略解だけにとどめるか，詳しく説明した場合は，その問題は基本的にレポート問題からはずすことになると思います．そうですね，早めに自分で演習問題を解いてみて，それから僕 (石川) に直接質問してみてはいかがでしょう．質問は大歓迎です．