数学概論Ａ (愛ではじまる微積分) 質問に対する愛の回答

No. １ (２００３年４月１１日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． 複素数はどのような背景があって作り出されたのですか？

答． こんにちは．書いてもらった質問のうち，僕 (石川) が答えられるものを集めてみました．他の人の質問も参考にしてみてください．さて質問に対する回答ですが，歴史的には，代数方程式 (とくに２次方程式) を解くために最初は考え出されたようです．

問． 複素数はベクトルのような実数の組としてハミルトンによって定義されたのが最初なのですか？それとも i という概念が先に考案されたのですか？

答． ハミルトン (Hamilton) の時代よりも前に i などの “虚数” の概念はあったと思います．ただし，永い間，i は正当なものとは考えられなかったようです．新しい概念は，たとえそれが便利なものであっても，なかなか人々には受け入れられないものです．

問． “ハミルトン” という人は，ケーリー・ハミルトンの人ですか？

答． そうです．Cayley と Hamilton は共に１９世紀の偉大な数学者です．ところで，Hamilton は，複素数をさらに拡張した「４元数」というものを考案したことで有名ですね．聞くところによると，ヨーロッパには，Hamilton の熱狂的なファンが多くいて，Hamilton 学会というものを結成しているそうです．

問． “i^i” とはどういう値になるのですか？一度，図書館のある本を読んでいたら，ただ単に「i^i は実数になる」とだけしか書かれていませんでした．

答． $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ なので，$i^i = e^{\frac{\pi i}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ となり，i^i は確かに実数になります．(より正確には，$i^i = e^{i(\log i)}$ が定義で，$\log i$ は「多価関数」であり，$e^{-\frac{\pi}{2}}(e^{\pi})^m$ (m は整数) という無限個の値をとります．でも，実数であるということは正しいわけです．ところで，$e^{\pi i} = -1$ という公式がありますが，これは,「いっぱい愛情をかけるとマイナスになる」と読めます．ほどほどが良い，ということでしょうか．失礼しました．

問． 回転になぜ複素数が使えるのでしょうか？

答． 確かに不思議ですね．考えてみると，複素数は $re^{i\theta}$ と表されます．r は長さ，θ は偏角 (x 軸からの角度) を表しています．すると，別の複素数 $se^{i\varphi}$ にかけると，$re^{i\theta} \cdot se^{i\varphi} = (rs)e^{i(\theta+\varphi)}$ となり，長さが r 倍され，偏角が θ だけずれます．とくに，$r = 1$ とすると,「複素数をかける」という操作が，図形的には「回転」に該当するわけです．

問． 実数というと何となく理解できる気がするのに，虚数は何か怪しげな感じがします．

答． 確かに，ネーミングは大切ですね．でも，実は,「実数」も本当に実在しているわけではありません．すべての「数」というものは，抽象的な存在であり，あくまで頭の中だけに存在するものです．この講義で扱う，π も e もある種の極限操作を経ないと定義されないものです．自然数 $0, 1, 2, 3, \dots$ でさえ，抽象的なものであって，本当に実在するとは言えません．たとえば,「数」の概念自体にしても，ものを数える習慣のない社会には存在しないと考えますが，皆さんはどう思いますか？

問． 微分の数学的な意味は何ですか？どのような場面で使われているのか教えてください．

答． 微分の数学的な意味は，$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, つまり，関数の微小的な変化を記述するものです．これしか数学的な意味はありません．でも，いろいろな場面に登場するので，それぞれの分野での重要な意味を持っています．物理学では，質点の速度や加速度，化学では化学反応速度，生物学では個体数変化，医学では血圧の変化，経済学では景気の動向などなど，微分を使ってそれぞれ表現可能なわけです．

問． 高階微分や重積分によって何を求めることができるのですか？

答． 確かに２階微分まではニュートン力学で登場するので必要性がわかると思います．より高階の微分の必要性は，古典的にはテイラー (マクローリン) 展開などの高次近似式を求めることですが，現代では，ソリトンの方程式 (浅い水の波の方程式) などのように３階以上の微分方程式も扱われるようになっています．３重積分は，物体の質量を求めるときに使いますが，４重以上の積分は，たとえば，統計や多変数解析で扱う高次元の平均値などを求めるために必要です．

問． マクローリン展開の変形がどうしてそうなるのかがわかりません．

答． 基本的な発想は，関数 $f(x)$ を $x = 0$ の近くで，べき級数に展開したいということです．今，仮に $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$ とおいて，係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ がどのように決まってくるかを調べると，$x = 0$ を代入して，$f(0) = a_0$, 両辺を x で微分してから $x = 0$ を代入して，$f'(0) = a_1$, 両辺を x で２回微分してから $x = 0$ を代入して $f''(0) = 2!a_2$, こうして一般に，$f^{(n)}(0) = n!a_n$ となり，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ と定まって，マクローリン展開が導かれます．

問． 積分には微分の逆演算という以外の導入の仕方はないのでしょうか？

答． あります．**実は,「積分」とよばれるものには２種類あります．** それは,「定積分」と「不定積分」です．定積分は面積や体積を求めるためのものです．不定積分の方が，質問にある微分の逆演算であって,「原始関数」を求めるということですね．この２つは，もともと何の関係もないものでした．そして,「定積分」と「不定積分」を結び付けたのが，皆さんがよく御存じの「微積分学の基本定理」というわけです．

問． $f(x) = x + \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ の意味は何ですか？

答． いわいる「積分方程式」の一種です．微分方程式もそうですが，未知関数のデータが複数箇所に入っているのが特徴です．方程式というものは普通にそのような形をしています．たとえば，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，未知数 x とその２乗 x^2 の "かねあい" で定まる関係式です．ところで，質問の方程式は，両辺を微分すれば，微分方程式となり，簡単に解けます．(皆さん，解いてみてください)．方程式など恐るるに足らず，というと言い過ぎでしょうか．

問． 微積分は誰がどういう時に思い付いたものなのですか？積分が先に考え出されたのでしょうか？// 微分と積分は別々の場所で発見されたそうですが，本当ですか？発見されたキッカケは何ですか？

答． そうです．積分が先です．積分は，たとえば，ピタゴラスやアルキメデスも考えていたと思います．でも，微分が考え出されたのは，ずっと後で，微分の発見はニュートンとライプニッツによると言われています．

問． 積分を面積や体積を求めるのに使うようになった経過を知りたいと思いました．

答． むしろ，もともと「積分」は面積や体積を求めるためのものとして歴史的に自然に発生した考え方である，と言った方が正確だと思います．しかし,「微分」と結びつくまでは，統一的な計算法がなかった，でも，微分積分学のおかげで，微分と結び付けて積分を考えることにより，それまで "神業" だった面積・体積の計算が，誰にでも (少し勉強しさえすれば) できるようになった，という歴史的な経緯だと思います．つまり，**微分積分学は,「積分の市民化」である**ということです．

問． 微積分は今後どういった面で必要になっていくのですか？

答． あらゆる面で今後ますます必要になると考えられます．はっきり言って，**２１世紀は数理科学の世紀になります．**

問． 偏微分可能ということの定義を詳しく知りたいです．

答． 詳しくとはいかないですが，簡単に説明します．関数 $z=f(x,y)$ が偏微分可能とは，極限 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ と $\lim_{k\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(x,y+k)}{h}$ が存在するということです．

問． 全微分とはなんですか？$f=f(x,y)$ とするとき，$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ が何を意味しているのでしょうか？

答． **全微分は「接平面」を意味しています．** (１変数の微分の意味が「接線」であるのと同じように)．

問． 微積分と級数，微分方程式と級数はどういう関係にあるのですか？

答． 密接な関係にあります．ニュートンは，もともと，微積分を級数を使って展開しました．微積分は (ニュートンの) 微分方程式を解くために生み出されたものです．このように，数学はばらばらの存在ではなく,「数学は一つの有機体」であると言われます．

問． 複素数で微積分が成立することを示すにはどうしたらよいのですか？// 複素数を用いることによって，微積分はどうなるのですか？// 微積分と複素数の関係はどういうものですか？詳しく知りたい．

答． この講義でゆっくり説明していきたいと思っています．乞う御期待．

問． 複素数の微分積分は難しいですか？なぜ，微積分 I, II の講義でやらないのですか？

答． ある意味で難しく，ある意味で簡単です．まず，実数から始めるのが，歴史的経緯からも正当だと思いますが，それを学んだあとで，もう一度，複素数を使った微積分を学べば，よりわかりやすくなるというわけです．

問． 初歩の微積分に関する参考書を教えてください．

答． 皆さんが１年生のとき使った教科書で必要十分です．この講義でも，それを読み返して大いに活用すると，実力がグーンとアップします．

問． この講義についていけますか？

答． いけると思います．と言っても，今はやりの「上達保証」などといった，いかがわしい保証はできませんけれど，(人の頭の中に手を突っ込んで調べるわけにはいかないので...) なるべく多くの人についてきてもらって，なるべく多くの人に満足してもらえる講義にしたい，講義に出てよかった，話を聞いて良かった，と思ってもらえるように，と日々努力しています．よろしくお願いします．

問． なぜ１００字以上なのですか？

答． この疑問はもっともな疑問だと思います．一つの答えは，もし「１００字以下」と指定すると，０字でもよいことになってしまうから，です．それはともかく，本当の主旨は，皆さんに自分の質問を自分でできるだけ詳しく説明してほしい，どういう意味の質問であって，どこまではわかっていて，どこからわからなくて，どういうことを聞きたいのか，どういう動機から質問しているのか，などといった説明を，なるべく詳しく書いてもらいたいわけです．詳しく書くことにより，考えがさらに明確になるという効用もあります．考えてみると，簡潔な説明ももちろんよいのですが，世の中には,「わからずや」が多いのも確かであり，簡潔な説明もできて，しかも，それをさらに噛み砕いて人に説明・説得できる，ということも非常に大切な能力になります．「大人はわかってくれない」と言う人がいますが,「わかるように説明していない」だけなのかも知れません．ながながと (１００字以上) 説明を書いてしまいましたが，僕 (石川) は大雑把な性格なので，万一，正確に１００字以上でなくても気が付きません．だいたいでよいです．

問． レポートはどのようなことを課しますか？

答． プリントの演習問題を中心に指定するので，それを解いてください．よろしくね．ではまた．