

線形代数 1 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ 剛郎)

No. 1 (2000年4月19日) の分

問. 行列の積はどうしてこのようにするのですか? AB の計算で, A は行のあつまり, B は列のあつまりとみて計算するとのことですが, 逆ではいけないのですか?

答. 後で, 連立1次方程式を解くときに行列を使うのですが, そのとき行列の積を講義で説明したように定義したことが威力を発揮します. つまり, 方程式を解くという操作が, 行列の積に翻訳され, そうすることによって, 計算に見通しが効くようになります. 今はそのための準備段階と考えてください. また, 行列の掛け算を定義するのは, 「1次変換(線形変換)」という考え方からすると, 極めて自然なものです. つまり, 「空間」の基本的な変換の式は, 1次式で表されるのですが, それが, ベクトル(特別の型の行列)に行列を掛けるという式で表されることが知られているのです. そして, その種の変換を続けて行うということが, 講義で説明した, 行列と行列の積の形で表現されるのです. そのような背景があります. ちなみに, (いっせいにすべて) 行と列を逆に定義してももちろん話の筋は同じなのですが, 世界標準に従いました.

問. 行列は何のためにあるのですか? どのようなところに使われていますか? どうして線形代数が数理学共通の基礎なのですか? 経済学部は数学をよく使うと言われているのですが, これから先どのように関わってくるのかわかりません. 高校の先生が経済では行列を使うと話していましたが, どう関係するのですか? 行列は銀行員がよく使うと聞いたことがあります, 実際の場面では, どんな目的でどんなふうに使われているのですか? 実用的な応用があれば勉強する意欲も違ってくると思うので.

答. 経済などの分野では, 数学は空気のような存在なのだと思います. つまり普段あまり意識しないけれどもいつも世話になっている. 意識して使ううちはまだ身についていない証拠で, 無意識に使えるぐらいに身につけることによって経済概念の研究に専念できる, という感じではないかと, 門外漢ながら勝手に想像しています. 経済の分野で, 客観性を確保するために, データを数値化することは普通の手段であると考えられます. 物の価値を, たとえば金額に数値化します. しかし, そこにはいろいろな変数が関わっていて, それらの変数の値によって最終的な金額が左右されるという仕組みだと思います. 消費者数, 在庫数, 競合製品の価格, 公定歩合, 平均株価, などなど. そして, 現代のように社会が複雑になればなるほど変数の数は増えていくと想像されますね. そのとき, それらの変数をまとめて扱えないか, 膨大なデータを並列処理できないか, と考えるのは自然な発想だと思います. それらの要望に答えるのが, 行列やベクトルの役目の1つであると言えます. したがって, 経済界(銀行員を含む)に限らず, いろいろな分野で行列やベクトルは使われています. 本当は, もう少し具体的な応用を説明するとよいかもかもしれませんが, 私(石川)は詳しくないので, もし情報があれば教えてください.

問. 僕は金融工学の勉強をしたいのですが, 行列はどういう風に使うのですか?

答. 「金融工学」がどういうものか, 私(石川)は知りません. できれば, もう少し詳しく説明してください. 金融のメカニズムを研究するのですか? それとも, 「錬金術」のようなものですか?

問. 行列は誰が考えたのですか?

答. 19世紀の数学者ケーリー(Cayley)が最初に発見したと言われています. 本格的に研究され始めたのは, 20世紀に入ってからで, そういう意味で, 行列というのは, 比較的新しい対象といえるかもしれませんね. Cayley先生は実は私(石川)の尊敬する数学者の1人です. ところで, 私(石川)の研究室にあるパソコンの名前はCayley君です. この回答書もCayley君がコンパイルしています.

問. 高校の旧課程では, ベクトルと連動して行列を使って空間を示していたと父が言っていました. 3次元などを数字の列だけで表すのは, かえって分かりにくいような気がしました. もともと行列は何を置き換えたものか教えてください.

答. 見識の高い父上と想像しました. ところで, 行列やベクトルをわかりづらく感じるのは, その扱い方が抽象的だからだと思います. 単に数値が並んでいるというだけでは, 意味が考えられませんね. 扱う行列が具体的な問題からくるものだと考えやすいものは確かです. でも, それでよいのです. 注目したいのは, どんな問題を扱うにしろ, 行列の理論は有効であり続ける, という点です. それが抽象的な方法のメリットです. 言い換えれば, いま学んでいることには, 汎用性があるということです. 逆に, その行列が何を置き換えたかによって, 行列の理論が使えたり, 使えなかったりしたら, 非常にこまりますよね.

問. 行列の積で, A が $m \times n$ 型で, B が $k \times \ell$ 型するとき, 積が定義できるのが $n = k$ の場合だけなのはなぜですか?

答. 講義で説明した積の定義をあてはめる場合, $n = k$ でないと, 数が合わなくなって, 横と縦のどちらかが余ってしまってうまくいきませんね. ちなみに, $n = k$ であれば m と ℓ は何でも大丈夫です. そして, AB は $m \times \ell$ 型行列になります.

問. 「 B を A の左から掛ける」とはどういう意味ですか? AB と BA が一致しないのはなぜですか?

答. BA ということです. AB と BA は, 一致する場合もありますが, 一致しない場合がほとんどです. 教科書に $AB \neq BA$ となるような具体例がありますね. 行列を掛けるということは, たとえと, 自動販売機でウーロン茶を買うとき, お金をいれてからボタンを押すのと, ボタンを押してからお金を入れるのが違うようなものです. 物事には順序が大切な場面も多くあるわけです.

問．3つの行列の積 ABC はどう計算するのですか？

答．よい質問ですね．まず AB を計算してから、 C を掛ける、つまり、 $(AB)C$ と計算しても、 BC を計算してから A を掛ける、つまり、 $A(BC)$ と計算しても同じ結果になります．掛ける順序は大切ですが、「くくりかた」は関係しません．これがいわゆる「積の結合則」です．

問．単位行列の意味は何ですか？単位行列は、正方行列が出たときしか使わないのですか？ $A+I$ とか AI は A が正方行列以外の場合にはあり得ないのですか？

答．これから説明しますが、単位行列は、数字の1の役割をする行列です．単位行列は(特別な)正方行列です．ですから、 $A+I$ のときはそうです．でも、 AI は、 A が $m \times n$ 型で、 I が $n \times n$ ならば定義されます． m が n に等しくても等しくなくても定義されます．

問．プリントの問題で、単位行列 I の型は自分で決めるのですか？

答．正確には、問題文に明記すべきでしたが、省略してしまいました．他の行列がすべて 3×3 型なので、それと合わせて解釈してください．

問．単位行列の $I(E)$ は、何かの単語の頭文字なのですか？ E は element の頭文字だからだと思いますが、 I は1に似ているからですか？

答．なるほど．それもありませんが、 I は identity の頭文字だと思います．いわゆる「アイデンティティー」ですが、他の行列に掛けても変わらない「恒等」という意味で使います．

問．行列の商はないのですか？

答．ありません．しかし、逆数のような役割をする逆行列 A^{-1} という概念はあります．(逆行列の存在には、 A に条件が必要ですが．)したがって、商のようなものとして、 $A^{-1}B$ と BA^{-1} が考えられます．しかし、行列の世界なので、これらは区別する必要があります．

問． 2×2 型行列の場合のケーリー・ハミルトンの定理は、 3×3 型行列の場合にも成り立ちますか？

答．成り立ちますが、形が 2×2 型の場合と変わってくるので注意してください．この講義では残念ながら紹介する予定はありません．直接質問に来て下さい．

問．「スカラー」とはどういう意味ですか？

答．英語で scalar です．行列と区別する場合、通常の数そう呼びます．scale、つまり「目盛り」からきた言葉でしょう．数値で目盛るということでしょうか．

問．行列についても、普通の式の2乗の公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ のようなものはありますか？

答． A, B が同じ型の正方行列の場合、 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ となります．ここで、 AB と BA は等しいとは限らないことに注意しましょう．

問．数学を幾何と代数とに分けて呼ぶにもかかわらず代数の中に線形代数と呼ばれる幾何的なものが存在するのはおかしくないですか？

答．するどいですね．でもおかしくありません．数学は1つです．数学を幾何と代数に分けるのは便宜上です．問題によって、代数的に考えるとよい場合もあるし、幾何的に考えるとよいときもあります．ちなみに私(石川)の好きな4文字熟語は、「融通無碍(ゆうずうむげ)」です．

問．「数学」という分野は世の中のどういうことに役立っているのでしょうか？

答．この回答書の前半部で、いかに数学が役に立つか、ということは少し説明しました．それと同時に私(石川)は、別に役にたたなくたっていいじゃないか、とも思います．森博嗣(もりひろし)という作家の推理小説の主人公である犀川創平助教授のセリフに、次のような内容のものがあつたと記憶しています：「人間だけが役にたたないことを考えられる．役にたたないことを考えることこそが人間的である．役にたたないことを考える者のみが、実は将来について考えられる」

問．自分で解答したものを先生に確かめてもらうということはできますか？

答．プリントの問題については、黒板に解答例を書くので、それを参考にしてください．それ以外の問題に関しては、直接質問に来てくれれば、確かめてあげますよ．

問．日本語がよくわかりません．

答．If you feel difficulty in explaining your question in Japanese yet, you may write it in English instead.

問．計算過程をテストに書くのは減点になりますか？

答．いえ、なりません．逆に、計算過程や説明をまったく省略すると減点になります．程度問題ということになりますが、細かい計算や検算は、下書き(答案用紙の裏など)に書き、キーポイントをわかりやすく答案に書くことが理想的ですね．ともかく説明を詳しくつけることは奨励されます．

問．受験参考書の行列分野はこの講義でも役に立ちますか？受験生の頃、「細野の数列・行列分野がおもしろいほどよくわかる」という参考書の数列分野がとてもわかりやすかったので、この参考書の行列分野を授業の予習として使おうかと考えています．可能でしょうか？

答．基礎的な部分の理解には役に立つと思います．ただし、この講義では、やはり一般的なところまで進むのでその参考書では当然もの足りなくなると思います．基本的に、教科書に沿って講義するので、教科書をメインにして、その参考書を補助的に使うのがよいのではないかなと思います．

問．立っている人がかわいそうです．教室変更はしないのですか？

答．交渉中です．まあ、私(石川)も90分立っているので仲間ですね．ではまた．