線形代数学２質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 7 （１９９９年１１月２９日) の分

問. 固有値は何の役に立つのですか？僕たちが今まで習ってきた学問の中で何につながるものなのですか？

答. 世の中のいろいろな現象，たとえば音，光，電気，地震などの波動・振動現象は，固有値を通して現われてきます．固有値はスペクトルとも呼ばれます．現実に，そのスペクトルに対応する固有ベクトル (この場合は固有振動など) を，われわれは観察していると言われています．この場合，考えるべきベクトル空間の次元は無限であり，線形変換も，無限次元空間から無限次元空間への線形変換です．一方，講義で扱っているのは有限次元の場合であって，少し違うのですが，有限次元の場合が基礎であり，それを十分に理解していれば，上のような現象を解析する際に非常に役に立つわけです．力学，電磁気学などの分野以外でも，皆さんが習っている統計学の分野，たとえば線形計画法などでも重要です．線形変換を深く調べるのに，固有値の研究は不可欠です．ところで，もともと固有値は，２次曲面の主軸を求めるのに登場していて，昔の人は，このようなことをみんな知っていて，幾何の素養が十分あり，その素養に基づいて，偉大な理論を構築し，利用できたのだと思います．そんな底力 (そこぢから) を多くの人が持っていたわけです．今はあまり幾何を勉強する機会がなくなってしまったので，皆さんのことが少し心配なわけですが，せめてこの線形代数の勉強を通して，固有値を単に計算できるだけではなく (計算できることはもちろん大切なことですが)，固有値の意味あいまで含めて学ぶよう心がけてください．

問. 教科書 p.53 に「固有値には幾何的意味がある」と書かれていましたが，ただの数字に図形的意味があるというのが理解できません．

答. なるほど，わかりづらいかもしれませんね．固有値とは，その行列で定まる線形変換で不変な直線について，その上での (変換の) 伸び縮み具合 (負の数の場合は，反転を含む) を表す数と考えたら良いと思います．もし，固有値 λ が複素数の場合，それは，複素ベクトル空間の不変「直線」の上で，λ 倍になるということになって，少し考えづらいかもしれませんが，その場合は,「複素直線」は「複素数平面」のようなものを指すと考え，その複素数平面上で，λ 倍する，つまり，伸び縮み回転を表すと考えられ，十分に図形的，幾何的にとらえられて，深く理解できるのではないかな，と思います．

問. 固有値の重複度とは何ですか？

答. 代数方程式の「重解」の概念と関係します．重解でない解の重複度は 1 であると言います．重解については，その整式 (多項式) を因数分解したとき，２乗の形になっていれば重複度は 2 といい，３乗になっていれば重複度は 3 と言います．この数は，実は「一般化された固有空間」の次元 (教科書 p.63 参照) と等しくなります．

問. 「代数方程式」の「代数」とは何かわかりません．

答. 昔のイスラムの学者 (昔世界史を勉強したときは名前を覚えていたような気がしますが忘れました，と書こうと思っていたら情報が入りました．フワーリーズミー，８世紀後〜９世紀中，ホラズム出身，アッパース朝．ちなみに同時代の詩人オマル・ハイヤームは，３次方程式の幾何的解法を見つけたそうです．世界史の資料なので，詳細は不明ですが) の書いた算術の本の題名から「algebra」という言葉 (もちろんもともとは英語ではなく，イスラム語，ラテン語などを経ているはずですが) がうまれ，それが「代数」と訳されました.「数に代えて」文字式 (x とか y とか) を使って計算する学問という意味です.「代数方程式」とは，ここでは，たとえば $3x^3 + 4x^2 - x + 5 = 0$ などのように，１変数の１次とは限らない多項式の単独方程式を意味しています．

問. 固有値を求める際に，複素数まで考えに入れるのは何故ですか？

答. 複素数の範囲では，n 次方程式は重複度をこめて，n 個の解をもつからです．考えた方が役にたつからです．考えないと窮屈だからです．複素数まで考えておいて，あとで固有値が実数かどうか見ればよいからです．そうすると世界が広がる (かも知れない) からです．

問. 複素数よりもさらに広い数の範囲はあるのですか？

答. 代数方程式を解く意味では，複素数まで考えれば十分ですが，他の目的からいろいろ考えられています．ハミルトンの４元数や，ケーリーの８元数などが良く知られています．

問. ハミルトン・ケーリーというのは，固有値を発見 (考案) した人の名前ですか？

答. Hamilton と Cayley という別々の２人の数学者の名前です．固有値を発見したというより，p.66 にあるケーリー・ハミルトンの定理を発見した人たちです．彼等は他にも多くの偉大な仕事をしています．もちろん発見した当時は，ケーリー・ハミルトンの定理あるいはハミルトン・ケーリーの定理とは呼ばれていなかったと推測されますが．関係ないですが，以前も書いたように，私 (石川) は Cayley 先生を尊敬していて，研究室にあるマッキントッシュのパソコンには Cayley 君という名前を付けています．

問. 複素数の存在する場所は虚数空間ですか？たとえば，$2 + 3i$ は虚数ですか？実数ですか？

答. 質問にある「虚数空間」の「虚数」の意味がわかりませんでしたが,「純虚数」のことと考えると，

$2+3i$ のように純虚数ではない複素数もあるので,「複素数は，複素数平面の上にある」としか言えないですね．(「トートロジー」のような気もしますが．)

問． ベクトルと複素数には密接な関係があるようなのですが，よくわかりません．高校の範囲から教えてもらえるとうれしいです．

答． 密接に関係しますね．いま講義で説明しているように，ベクトル空間の線形変換 (１次変換) の固有値を研究する際に，複素数を使います．それ以外の関連を説明しましょう．平面幾何は知っていますか？平面上の直線や円などの図形を研究するのですが，その際，複素数を利用すると便利です．つまり，ベクトルのうちで，とくに 2 次のベクトル，つまり $\mathbf{R}^2$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を複素数 $x+yi$ と同一視し，そうして，$\mathbf{R}^2$ を複素数平面 $\mathbf{C}$ とみなすわけです．そうすると，円の方程式は $(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=r^2$ と表されたり，回転は，複素数 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を掛けることだ，と考えられたり，といろいろ便利なわけです．

問． 線形変換で，基底を定義域，値域で共通にとるとはどういうことなのですか？

答． 線形写像 $f:V\to W$ で，V を f の定義域，W を f の値域と言います．とくに，W が V に一致しているとき，$f:V\to V$ を線形変換 (１次変換) と言います．その際，基底を定義域，値域で共通にとる，つまり，V の１組の基底 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,x_n$ をとり，式 $(f(\boldsymbol{x}_1),f(\boldsymbol{x}_2),\ldots,f(x_n))=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,x_n)B$ で表現行列をきめるということです．そうすると何がよいか，というと，固有値を考える際に役に立ちます．また，たとえば，f を２度続けた変換 $f^2=f\circ f$ の表現行列が B^2 となり便利です．これはほんの一例で，多くの利点があります．利点というより，そのようにとる，やむにやまれぬ理由，必然性があって選ぶのだ，と言えます．

問． 線形代数学でいう次元とは，フラクタル (自己相似性) の次元と何か関係がありますか？

答． 深い意味あいでは関係しますが，とりあえずは無関係と考えてよいかと思います．なお，線形代数での次元は，自然数ですが，フラクタル次元は，一般に有理数 (分数) になりますね．

問． ★教科書 p.109 の問 2 (3) の解答で，行列式が $(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ これより，固有値は，$1,2,2$ となっていますが，それなら $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ではないでしょうか？

答． よく見つけましたね．ミスプリントですね．固有値は，$-1,2,2$ です．行列式の計算結果はそのままでよいです．

問． 旧課程では高校で固有値を教えていたと聞いたことがあります．どうして新課程では外されたのですか？受験対策で，自分で固有値を勉強したのですが，けっこう興味を持てた記憶があります．おもしろいのにどうして新課程では採用されなかったのかと思いました．

答． 同感です．事実確認していないので，正確ではありませんが，もしそうなら，ゆとり教育ということで，教科内容が骨抜きになっているということでしょうか．中学校や高校の科目で，中身をうすめれば理解が深まる，というのは，あまりに形式的な発想だと思います．もちろん「ゆとり」があるのは良いことなのですが，若いときには，体も頭も鍛えて，これからの激動に時代に生きていかなくてはならないと思います．使わなければ，体も頭も錆び付きますね．人間の頭脳は，通常１０パーセント程しか働いていないそうなので，脳みそには十分ゆとりがあると思います．おもしろいことがあるのに教えないというのは，ナンセンスですよね．皆さんの良い頭をより良く活用していくように，いろいろなことを勉強するということが大切と感じました．

問． 線形代数学が良くわかりません．この学問は抽象的すぎてなかなか理解できません．何かよい勉強法はありませんか？

答． 抽象的なものになれるように，具体例をたくさん勉強するのが良い方法です．ところで，抽象的ということで思い出しましたが，新聞の特集記事にあったのですが，いわゆる補習塾に通っている小学６年生が，$7+5$ を計算するのに指を使っているので，塾の先生が，どうして？と尋ねたら，学校の先生が指を使いなさいと言ったからと，その子が答えたそうです．その子供にとって,「数」という概念がまだ抽象化できていない，ということですが，教育者が抽象的な概念の教育を放棄したらこまりますよね．(塾の善し悪しは別として．) もしこの子に，$10^{10}+10^{10}$ を計算させたら，けんしょう炎になってしまいますね．それはともかく，実はこの世の中，抽象的なものであふれている，われわれは日々抽象的なことを考えて生きているんだ，と思います．いろいろなレベルの抽象的概念がありますが，時間，数，人間関係，社会，法律，歴史，自然，美，善，悪，生，死などなど．難しい限りですね．でもそれを避けていては，十分に生きている，ということにはならないのではないでしょうか．ところで，抽象的なことは，確かにわかりづらいのですが，それがわかったときの喜びは，なかなかのものです．自分が少しだけ大きくなったように感じ，自信がつきます．自分の世界が，昨日より少しだけ広くなった，と感じるかもしれません．皆さんが，他にもおもしろいことがたくさんあって，時間が足りないのは十分理解しているつもりです．でも，その足りない時間を少しだけ割いて，より抽象的なものを勉強してみてください．