線形代数学２質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ６ (No. ５ は欠番) (１９９９年１１月１５日) の分

問．表現行列は今後どのように利用していくのですか？この先どのようなメリットがあるのですか？どんなことがわかりますか？表現行列をもとめてどうするのですか？

答．表現行列は，線形写像を行列によって表現するものです．**上手に基底を選んで，表現行列が簡単になれば，その線形写像がよくわかるのではないか**，という発想から生まれたものです．どんなことでも上手に表現してわかりやすくする，というのは自然な発想です．表現行列の応用例としては,「行列の対角化」があります．行列の対角化についてはこれから説明していきます．ところで,「フィボナッチ数列」というのは聞いたことがありますか？「黄金比」というのは聞いたことがありますか？様々な自然現象，社会現象は，これらによって支配され，コントロールされていることが知られています．そして，行列の対角化を知れば，これらのことが良くわかります．そのことはいずれわかります．それはともかく，この講義の，そして大学でのすべての講義の究極の目的は，中途半端な知識を伝授することではなく，**自力で考える力を皆さんにつけてもらう**ということです．まあ，あまりせっかちにならず，カルシウムをたくさんとって，広い視野で，今後の展開を見守っていてください．

問．表現行列の定義がわかりません．

答．線形写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ の場合で説明しましょう．(一般の場合は，教科書を参照してください．) それが線形性を持っているという点に注目し，定義域 $\mathbf{R}^n$ の基底と，$\mathbf{R}^m$ の基底をきめることにより，この線形写像を行列で表現します．具体的定義は次のようになります．$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基底とします．つまり，n 次列ベクトルの n 個の組で，１次独立なものとします．(p. 14 の系 1.11 ($r = n$) から n 次元ベクトル空間のなかの n 個の１次独立なベクトルの組は基底です．) また，$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ を $\mathbf{R}^m$ の基底とします．つまり，m 次列ベクトルの m 個の組で，１次独立なものとします．(p. 14 の系 1.11 ($r = m$) から m 次元ベクトル空間のなかの m 個の１次独立なベクトルの組は基底です．) 基底であれば何を選んでも以下の定義が適用されます．まだ定義していませんが，ここまでは良いですか？さて，基底 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ と基底 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ に関する f の表現行列とは，行列の等式 $(f(\mathbf{p}_1), f(\mathbf{p}_2), \dots, f(\mathbf{p}_n)) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m)B$ をみたす m 次正方行列 B のことを指します．この際，$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ が１次独立ということから，表現行列は確定します．これが表現行列の定義です．

問．表現行列が，基底を決めないと得られない理由を教えてください．

答．上で書いたように，基底を決めて定義しているからです．

問．写像を「制限する」とはどういう意味ですか？

答．年齢制限と言う場合，ある年齢の条件をみたす一部の人だけが対象になるということですね．年齢により制限するわけですが，何を制限するかというと，入場を制限したり，投票を制限したり，起訴を制限したり，購買を制限したりするわけですね．線形写像を部分空間に制限するという場合も同じことで，その部分空間に属しているベクトルかどうかで制限し，ベクトル $\boldsymbol{x}$ をベクトル $f(\boldsymbol{x})$ に写す (移す) という行為を制限します．線形写像を部分空間に制限したものも線形性をもつので，線形写像と言います．

問．線形写像の核と像の概念がよくわかりません．

答．たぶん,「写像」という概念がわからないからと推測します．とりあえず，教科書 p. 43 の補足 D を読んでみてください．そのあとで，p.32 の８行目と９行目を，５回ノートに書き写してください．そのあとで，問題を解いてみてください．

問．$\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ のとき，$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b} \rangle$ となることがわかりません．

答．$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ はベクトル $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ を含むような最小な部分ベクトル空間であると言えます．同様に，$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b} \rangle$ は，ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ を含む最小な部分ベクトル空間です．でも仮定から $\mathbf{b}$ が $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ に属してしまっているので，結局，ここに出てくる２つの部分空間は一致してしまいます．

問．線形写像が実社会で使われていることはあるのでしょうか？

答．講義で説明している，線形写像を通して連立１次方程式を見直すということは,「代数理論の幾何学化」です．いわば「世界観を構築する」ということです．レベルの高い理解をめざす，ということです.「理念」を持つということです．線形写像は，現代の幾何学の基礎として重要です．え，幾何学なんで役に立たないですか．でもピカソの絵は役にたちますか？役に立たないけれど，大切な人類の財産ですね．モーツァルトの曲は役にたちますか？一般相対性理論は役にたちますか？そういうものを鑑賞することは，皆さんの無駄にはならないと思います．ところで，銀行のトップに「世界観」「理念」がないから，易きに流れ，中小企業に金を貸さずに，商工ローン会社に資金を出して，何の問題も感じなくなってしまったのかもしれません．それはともかく，線形数学はいろいろなところで使われています．皆さんも使っているはずです．原始時代ならともかく，現代のような高度文明科学技術情報化社会では，知らないうちに，線形数学の概念なり計算なりを (広い意味で) 使って制作された便利な機器の恩恵を，皆

さんも受けていると推測されます．たとえ話になりますが，皆さんが電車で MD の音楽を聞けるのは線形数学のおかげです．私たちは，複雑な現代社会に生きていることを自覚しましょう．いや，われわれは単なるユーザーだから，詳しいことは知らなくていいのだ，使えればよいのだ，という意見もあります．一見確かに，そうかも知れません．でも，そのユーザーも，社会に参加し，他人が苦労して作り上げた製品なり情報なりを享受するわけだから，それと引き替えるための対価を自分で手に入れなければなりません．それを得るには，ある分野で，他の人にはできない，他の人がわからない，素人ではとても手がでない，というようなことを実行して，つまり，ある職業に従事して収入を得るわけですね．その際，線形数学のような基本的なものを知らない人物を，企業は採用しないでしょう．まあ，一旦は (間違って？) 採用されても，リストラされるかもしれません．なぜなら，日々新しいことを開拓していかなければ，企業が利益を獲得できない現代の競争社会で，これは難しいからわかりません，**基礎がわからないからお手上げ**です，では生き残れないからです．いや，必要になればいつでも勉強するさ，という人がいるかもしれません．でも，若い今できない人に，中年になって，それができるということは期待できない，と考えるのが普通でしょう．この点は冗談ではすまされないことですね．(以上の文章は，以前に別の質問への回答に使ったものを少しだけ変えたものです．)

問． 教科書 p.13 に出てくる「解析幾何」とは何ですか？

答． デカルトという人が創始した，代数的な概念を応用した幾何学のことです．「射影幾何」は知っていますか？あ，そうか，今の若い人は幾何を習わないんですね．ところで，デカルトという人は，「われ思う，ゆえにわれあり」と言ったひとです．聞いたことがありますか？この意味はわかりますか？線形代数とどちらが難しいでしょう？

問． 教科書の定理 2.3 に証明や例題がないところを見ると，「学生はやらなくてもいいぞ」ということですか？

答． それなら，教科書には書きません．違います．それ以前の文章を理解していれば，自然に納得できる箇所だと思います．「学生はなんでもやるといいぞ」

問． 問題の解き方の手順さえ覚えれば原理がわからなくても解くことはできますが，これでよいのでしょうか？求め方は機械的にわかるのですが，「何をやっているのか」という真意がいま１つ浮かんできません．なんとなくわかれば，問題さえ解ければ良いのでしょうか？

答． 単純労働者になりたければそれでよいです．(単純労働者を差別したり，バカにしているわけではありません．でも，単純労働のような仕事を人間がしないで済むように，機械や道具を作ったり，方法を改良して，人類は文明を発達させてきたわけですよね．) **皆さんはエリート**だから，もう少し上のレベルの理解をめざしてはいかがかな，と思います．(これはエリートを逆差別したり，ちやほやしたりしているわけではありません．でも，国民の税金を使って勉強しているのだから，それなりの自覚と責任感をもって励んでほしいですね．) よくわからないけれどマニュアルに従っていればいいや，という精神が蔓延していることが，銀行の不良債券問題や原発事故やロケット打ち上げ失敗につながっているのかもしれません．恐ろしいことですね．

問． ここにきて線形代数がもうちんぷんかんぷんです．どんどんややこしくなって，もうあまりわかりません．次から次に新しく習うことが出てきて頭が追い付いていきません．「何のために私はこういうことをやっているんだろう？」と思ってしまいます．最近新しい話ばかりでちょっとしんどいので…

答． 数学は永い歴史をもち，様々な英才たちが努力を重ねて築きあげてきた，いわば知的殿堂です．こう言ってはなんですが，そうやすやすとわからなくて当然です．すぐにわかったら天才ですよね．実は**世の中わからないことだらけ**です．そこのところを少しづつ，少しづつ，一歩一歩，理性に基づいて理解していく，ということが科学の精神ですね．(**なんでも簡単にわかった気になる不遜さとは対極にある，健全な精神**が科学では大切です．) それに，もし講義を聞いてすぐわかるような事だったら，それは簡単なことだから，大学で講義する意味がないですね．難しくて当然なんです．数学は，講義の前に教科書をながめて 10%，講義をきいて 30%，問題を解いて 60%，少し忘れて 55%，次の講義を聞いて 73%，質問して 85%，ひらめいて 100%，ああ勘違いで 75%，友達と話して 80% という具合にすこしずつ理解していくものなんです．語学の勉強と一緒ですね．数学や語学は若いときでないと身につかないと言われます．その理由の１つは，若いときは，「わからない」という状態に耐えられる気力，体力が十分あるということだと思います．私 (石川) のように年をとるとダメですね．(老人力はついてきますが．) そういう意味で，君たちの若さに期待しています．「わからない」というのは良い状態なんです．もちろん，こちらも工夫して，わかりやすく講義して，皆さんの理解度をアップするよう努めます．

問． 参考書を紹介してください．

答． 毎回の講義に，前期の教科書「行列と連立１次方程式」も持ってくるとよいと思います．前期の内容をだいぶ忘れた (または初めから理解していなかった) ことが，今講義で説明していることを理解できていない原因の１つと推測されるので．そして，それを参考にしながら，**講義をよく聴いて，教科書をよく読んで，問題をよく解いていれば大丈夫です**．それ以外の参考書はまったく必要ありません．

回答者から． 今回は，質問書を書く時間がとれなかったせいか，良い質問が少なかったようですね．回答も良くないですね．お互いに次回はがんばりましょう．