線形代数学２質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ４ (No. ３ は欠番) （１９９９年１１月１日) の分

問． 線形写像をすると，どういうことが考えられるのですか？どんな良いことがあるのですか？

答． 連立１次方程式を深く理解できるようになります．それに関しては後日説明します．ところで,「写像」は日常語では，たとえば「映写機でスクリーンに映像を写す」というときに使うことができますね．友達と映画を観にいって，もし，映画館のスクリーンが曲がっていたらどうなるでしょう．本当はまっすぐなものが，曲がって写りますね．好きな女優，男優の見なれた顔が歪んでしまいます．そのときは映画館の掛りの人に文句を言いましょう．それはともかく，線形写像は，まっすぐなものはまっすぐなものに写すという良い性質があります．(このことは，線形性から従います)．まっすぐなスクリーンで写すのが線形写像，というと少し言い過ぎですが，とりあえずのイメージとしては良いかも知れません．

問．「線形性」はどのような場面で役にたつのですか？統計学の講義にも線形性が出てきました．確か，Σ とか，$\int$ とか言う話だったと思います．標本変数の期待値が線形性を持つ，と習いました．

答． たとえば，線形計画法というものがあります．以前も書きましたが,「微分」も線形写像です．線形性はあらゆる場面で登場します．というのは，複雑な現象を，１次式で近似する，線形近似する，というのは，どんな場合でも，まず初めにやるべきことだからです．その際の解析に,「線形写像」という考え方は不可欠になります．したがって，線形写像は，無理して考え出されたものではなく，考えるのが当たり前であると言えます．それだけに,「線形性」ということがわからないと，いろいろな研究・調査が的外れになりかねません．線形性を意識しているか，意識していないかで，結果に大きな差が出ます．線形代数 II の講義で,「線形写像」を一度でも聞いたことがあるか，あるいは，全然聞いたことがないかの違いで，将来ノーベル賞が取れるか，取れないか，が決まるかも知れません．皆さんが「線形写像」というのを昔聞いたことがあるというおかげで，人類を救う世界的プロジェクトが成功するかも知れません．将来，何かあるかわかりません．線形代数 II で扱う線形写像の理論は，微分積分と共に，数理科学全ての基礎になります．このチャンスにしっかりマスターしておきましょう．

問． ★線形写像は，講義では行列を使って定義していましたが，別に行列でなくても，例えば積分などで線形写像ができるのではないですか？

答． 鋭い指摘ですね．その通りです．積分は「無限次元ベクトル空間から，無限次元ベクトル空間への線形写像」なので，現在学んでいる有限次の行列で書くことができるものからは，はみだした存在です．しかし，積分も,「無限次の行列」をつかって表すことが可能です．線形性と行列は切っても切れない間柄にあると言えます．

問． 後期の線形代数は，前期と比べて格段と難しくなって，いろいろ新しい概念が次々出てきて，**正直言って，いっぱいいっぱいです**．どのように勉強したらよいか，アドバイスをお願いします．

答． 新しい概念を理解するのは，何であれ難しいことであり，同時に大切なことです．たとえば，経済学で「需要」とは何か，生態学で「環境」とは何か，政治学で「国家」とは何か，本当に理解するのは難しいことです．でも，それを理解することこそが，その学問の重要な目的であったりします．そのような概念については，はじめから完全に理解しようとせずに，徐々に親しんで，だんだんとイメージをふくらまし，理解を深めていけばよいですね．数学の場合もそれと同じですが，すべての概念は厳密に定義されていて，それに従って考えれば良いわけなので，その点では楽ですね．でも，その概念を，真に理解するには，やはり，徐々に親しんで，だんだんとイメージをふくらましていうことが必要です．そうですね，まず，新しい概念の定義の文章を，5 回ノートに写してください.「１次独立」とは,「部分ベクトル空間」とは,「生成系」とは,「基底」とは,「次元」とは,「線形写像」とは,「像」とは,「核」とは,... そのあとで，関連する問や練習問題を 3 題解いてください．それでもわからなかったら，定義の文章を，あと 10 回ノートに写してください．つまり “写経”ですね．それでもわからなかったら，もう１度質問してください．ともかく，あせってはいけません．少しだけ抽象的な見方をするのは，理論の応用範囲を広げようというねらいからです．難しそうにみえますが，基本的には，行列が分かっていれば大丈夫ですから，何の心配も要りません．講義内容を全部記憶しなければならないとか，すみからすみまで完璧に理解しなければいけないというわけではありません．まあ，親や親戚に「いま大学でどんなことを勉強しているんだ」と聞かれて,「線形写像を勉強したよ，線形写像の理論を使うと，連立１次方程式の解法が明解にわかるんだ」と自慢できる (煙にまける) ぐらいのことは記憶に留めておけば楽しいかもしれません．そして，ついでに,「北大に入学して，すばらしい講義が聴けて本当に良かった」と自慢しておいてください．

問． 線形写像 (１次写像) に対して，２次写像と言うのはありますか？◯◯写像というものは他にあり

ますか？

答． 2 次式で定義された写像はそう呼べるでしょうね．それから，線形写像の他に，アフィン写像，代数写像，解析的写像，可微分写像，連続写像などなどいくらでもあります．このように多くのものがあるのは，問題意識により，扱う対象が変わり，注目している対象には，それぞれに名前をつけるからです．(この場合は，写像の種類の名前です)．花の種類に名前があり，木の種類に名前があり，山にあり，川にあるように，写像にも名前があるわけです．

問．「写像」とは何ですか？$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の関数とみてよいのですか？

答． 教科書 p.43 補足 D を見てください．それから「関数」ということをどう習ってきたか推測できませんが,「写像」は「関数」を含む広い概念といえます．ただし，今扱っている写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は，(n 変数の) **ベクトル値関数**と言うこともできます．

問． 部分ベクトル空間 L の「基底のベクトルの個数は，基底のとり方によらない」というのはどういうことですか？

答． L の基底はたくさんあります．基底というのは，L のベクトルの組 (グループ) であるわけですが，たとえると，L 地方選出の国会議員団と言えます．国会議員団は，もちろん L 地方の全ての人の意見をくまなく代表しなければならないし (生成系)，しかも重複なく無駄がないことも必要ですね (１次独立)．１次従属だと税金の無駄使いですね．このとき，国会議員団の選び方としては何通りもあり，選挙のたびに顔ぶれが変わるのが普通です (田舎の村会議員団なら毎年同じ顔ぶれかな)．ただし，定員 (人数) は決まっているというわけです．その人数を次元と呼ぶ，というたとえはどうでしょう．

問． ある部分ベクトル空間のある基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ に r 次正則行列をかけると別の基底になると言えるのですか．

答． 言えます．つまり，P を任意の r 次正則行列して，$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r)P$ とすると，$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ も L の基底になります．

問． 基底の変換行列は何に使いますか？

答． あとで出てくる,「行列の対角化」のときに不可欠です．

問． 基底 = １次独立な生成系，について，もう少しかみくだいて説明してください．生成系という言葉と，基底という言葉の意味の違いがわかりません．

答． 具体的に，$L = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ の場合で説明しましょう．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，１次独立で，L の生成系なので，L の基底です．$L = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ とも表すことができますが，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は１次独立ではないので，L の基底とは言いません．また，$L \neq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ なので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は L の生成系ではないので，L の基底でもありません．(ちなみに，この具体例では，$L = \mathbf{R}^2$ です．) あまり噛み砕くと，皆さんの噛む力が弱まる気もしますが…

問． 生成系と基底と標準基底の違いがいまいち (いまひとつ) わかりません．

答． 具体的に $\mathbf{R}^2$ で言うと，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は生成系で，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は基底で，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は基底で，特に，標準基底と呼びます．

問． 教科書 p.11 の問 8 の解答で，$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく，というのですが，その発想がわかりません．

答． 定理 1.5 の証明を読んでみてください．それによると，$\mathbf{a}_3$ としては，L に属していないベクトルであれば，どれでもよいことがわかります．定理 1.4 も参照してください．一般論の具体的な適応をしているにすぎません．したがって，解答は１通りではありません．基底も１通りではありません．

問．「１次結合たちの１次結合」とは何ですか？

答． たとえば，$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ と $-3\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2$ の１次結合 $5(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) + 4(-3\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2)$ です．これは，$-7\mathbf{a}_1 + 12\mathbf{a}_2$ となり， $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の１次結合です．

問． 1次元部分ベクトル空間 $\langle \mathbf{a} \rangle$ を直線と言うとのことですが，$\mathbf{a}$ は列ベクトルであり，成分が多数あり，図形化できないのでは？

答． 成分が多数あっても，固定したベクトル $\mathbf{a}$ の成分をいっせいに何倍かするだけなので，自由度は 1 です．2 次や 3 次の場合は，図形化できます．その場合 $\mathbf{a}$ が直線の方向ベクトルに該当します．その類推で，高次元空間の中の1次元部分空間でも「直線」と呼ぼうぜ，と提案しているわけです．

問． 1次変換とは，基底の変換のことですか？

答． 少しだけ違います．1次変換とは，線形変換とも呼ばれ，線形写像 $V \to W$ であって，しかも $V = W$ の場合にそう呼びます．教科書 p.51 を参照してください．

問． 今習っていることは，複素ベクトルでも成り立ちますか？$V = \mathbf{C}^3$ は，3 次元以上になるような気がします．

答． 成り立ちます．ただし，その場合，スカラーも複素数を考えます．そうすると，$\mathbf{C}^3$ の次元は 3 になります．教科書の p.26 を参照してください．

問． $AX = E$ だが，$XA \neq E$ となる行列はあるのですか？

答． A, X が同じ型の正方行列であればありません．確かに，逆行列の定義では，$AX = E$ と $XA = E$ の両方を必要としましたが，前期でお話した通り，行列の理論により，一方の等式があれば，$X = A^{-1}$ がわかり，もう一方も**結果的に**成り立つことがわかります．(前期に，そのことは説明したはずですが．)

問． 部分空間の直和のところで，$\oplus$ とは何ですか？どうして，$\oplus$ と書くのですか？$+$ ではダメなのですか？

答． $\oplus$ と $+$ は意味が違うので，記号を区別しています．p.16 と p.18 を参照してください．

問． ベクトルが 2 次，3 次ということと，関数が 2 次，3 次ということは同じことですか？

答． 違います．

問． 写像の矢印 $\longrightarrow$ と $\mapsto$ はどう使い分けるのですか？

答． $\longrightarrow$ は，$X \longrightarrow Y$ のように，集合 X から集合 Y への写像という意味で使います．$\mapsto$ は，その写像に関して，個々の要素の対応 $x \mapsto y$ を表すときに使います．

問． ★線形写像の性質 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ から，$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ が導かれるのではないですか？というのは，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ だから，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) = 3f(\boldsymbol{x})$ であり，$f(\boldsymbol{x}+\cdots+\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \cdots + f(\boldsymbol{x})$ (c 個) $= cf(\boldsymbol{x})$ となるから．

答． ちょっとだけ鋭い指摘ですね．でも違います．確かに，c が自然数なら，その通りです．でも，c は任意のスカラーであり，たとえば，$c = \sqrt{2}$ だったりします．その場合は，上の論法は通用しませんよね．

問． 前回の質問の回答書で，$V = \mathbf{R}^4$ は図示できない，と書かれていましたが，僕達が 4 次元の世界に住んでいたらどうなのですか？また，もし 5 次元の世界なら，$V = \mathbf{R}^5$ も $V = \mathbf{R}^4$ も図示できるのですか？

答．「図示できない」などと軽はずみなことを私 (石川) が書くはずはありません.「無理すれば図示できる」のではないか，という問に,「無理するのはいやだ」と答えただけです．まず事実認定をはっきりさせておきます．さて，この質問に答えるには,「図示」とは何か，ということを明確にしなければなりませんね．私 (石川) は，これは，想像力の問題だと考えます．つまり，通常，図示するのは，黒板や紙など，平面 (2次元) 上に実行しますね．それを，見る側が，あたかも 3 次元であるかのように，つまり立体的に想像するわけです．もちろん，彫刻とか，ホログラフィーなどいわいる立体的，3 次元的な “図示” の仕方もありますが，見る側の網膜に写る像 (写像) は，やはり 2 次元です．それを想像力で補って，理解するのが実際のところです．では，われわれが，なぜ 3 次元を想像できるか，それは，進化の経過で身に付けた能力であると考えられます．つまり，物の奥行き，遠近感，といったものを想像する能力は，生き延びるために必要不可欠であった，ということは容易に想像できますね．ライオンが遠くにいるのか，ヒグマが近くにいるのか，を認識するのは，生死にかかわります．それに比べて， 4 次元を想像する能力は，さほど必要なかったわけです．(もし生き延びるために 4 次元が必要だったら，生き延びてきたわれわれは，4 次元を容易に想像するでしょうね．) というわけで，われわれは，4 次元を想像する能力を持ち合わせていないと考えるのが適当でしょう．ところで，われわれは,「時間」というものを想像する能力も持ち合わせています．時間という概念が，どのぐらい生き延びるために切実だった

か，ということはわかりませんが，想像するに，朝日がのぼり，夕日がしずみ，人が生まれ死んでいく，ということから自然発生的に生まれた概念でしょう．それはともかく，4 次元をいうものを説明するのに，われわれが想像するのに得意な 3 次元に，これまた馴染みのある時間がたまたま 1 次元だから，それを加えて，(無理して?) 4 次元を想像しようとするのは，至極当然といえます．その際の図示というのは,「動画」ということになりますね．つまり，多くの 2 次元的な図の積み重ねで， 3 次元的な物の推移を想像させ，そして，それで 4 次元を理解しようという試みですね．実際，現代数学では，そのような手法が使われることもあります．だだし，ここで，注意してほしいのは，線形代数で扱っている次元は，データの種類の数であり，無色透明，なんでもござれ，という普遍性があるということです．言い換えれば，たて，よこ，高さ，時間，といった変数に固執することなく，他のどんな状況でも応用できる話です．今皆さんが勉強していることは，**抽象的だからこそ応用範囲が広い**のです．したがって，無理して図示しなくても，論理規則を守り，計算規則にのっとり，定義に従い，理論の前提をチェックしておきさえすれば，論理的に結論が出せる，ということです．これが近代科学の強みです．このことにもぜひ注目してください．

問． ☆教科書 p.15 の例 14 で，$\mathbf{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とありますが，おかしいのではないですか？

答． 誤植です．良く見つけましたね．見つけてくれることを待っていたのです．$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直してください．(つまり，2 を 1 に訂正し，それに応じて，その下の計算でも 2 を 1 に直してください)．すみませんでした．他にもミスプリント等あったら指摘してください．助かります．

問． 教科書の補足は自習した方がよいのですか？

答． 講義では扱いませんが，自習しないよりは，したようがよいに決まっています．とりあえず，教科書の本文を理解するのに必要と感じたら，補足の必要な箇所を，ためらわずに勉強してください．何もためらう必要はないですね．そして，読んでみて，補足の内容に興味を感じたら，とりあえず必要を感じなくても他の補足もよんでみてください．そうすると，以外や以外，本文に書いてあることが，あーら不思議，ずいぶん簡単に見えてきます．これは本当の話です．

問． 質問書の質問につける「説明」は何を書けばよいのですか？

答． 仮に皆さんが口頭で，誰かに質問したとき,「え？どういうこと？」と聞き返されたとして，その質問を補足説明する場合のように書いてください．私 (石川) と「会話」しているシチュエーションを想定して，ていねいに書いてくださいね．では今後ともよろしく．