線形代数学２質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 2 (No. １ は欠番) (１９９９年１０月１８日) の分

問．「１次独立」ということを考える意義は何ですか？それを調べて得るものはありますか？

答．「次元」ということを，(なんとなくではなくではなく) きちんと考えるために，ベクトルの組が１次独立，ということを明確に規定する必要があります．これに関しては近々説明する予定です.「次元」の意味がはっきりすれば，応用として，行列の階数の意味が，よりはっきりします．行列の対角化なんかもすんなりわかちゃたりします.「１次独立」ということを考えると良いことづくめです．悪いことは何もありません.「１次独立」ということが理解できれば，これから半年，楽しく講義が聴けます.「１次独立」ということが理解できなければ，これから半年，講義を聴くのが苦しくなるでしょう．さて，ベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が**１次独立**であるとは,「$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ という関係式から $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれる」ということで定義されます．定義自体は洗練されたものなので，確認し易いと思います.「１次従属」とは,「１次独立でない」ということ，つまり,「$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\cdots+c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ という関係式から $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれない」ということ，言い換えれば,「すべては 0 ではない $c_1, \ldots, c_r$ があって，$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ となる」と定義されます．洗練された定義なので，確認し易いと思います.

問．１次独立の「１次」とはどういう意味ですか？「２次独立」というものもありますか？

答．「１次」とは英語の linear の訳で,「線形」という意味と同じ意味です.「２次独立」というようなことは (考えられなくもないけれど，少なくとも線形代数では) 考えません.

問．「１次結合」がわかりません．何の意味があるのですか？

答．前期に扱った連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ は，$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ と列ベクトルで表したとき，$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ という式に書けます．この左辺は，列ベクトルのスカラー倍の和の形をしていて，１次結合です．($x_1, x_2, \ldots, x_n$ が係数です．) つまり，この方程式は，与えられた $\mathbf{b}$ に対して，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を適切に選んで，１次結合の形に表されるか，ということを意味しています．このように,「１次結合」は，連立１次方程式を理論的に考えようとすると，自然に登場する概念であると言えます.

問．定理 1.4 を具体的に説明してください.

答．$V = \mathbf{R}^2$ とします. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は１次従属です．このとき確かに $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と１次結合で表されますね．(2 と -1 が係数です．) 定理 1.4 はこのような事実を，一般の定理の形に表現しているだけのことです.

問．$\mathbf{R}^m$ は，$m \geq 4$ になると想像がつかなくなります．ドラエモンのポケットと考えてよいのでしょうか？

答．4 次元ポケットのことですね．でも，ここで扱っている 4 次元空間は，そんな気の効いたものではなく，困ったときに助けてくれるわけでもなく，何でもほしいものが手に入る魔法の箱でもなく，どこにでもある，ありふれたものです．皆さんのデータ，たとえば，身長，体重，年令，脚の長さ，を数値にして，縦に並べたら，ほうら，4 次のベクトルです．個人によってデータは千差万別ですから，4 次元ベクトル空間を考えるのが自然ですね．また，データの平均などを計算するときなど，ベクトルを足したり，スカラー倍するのも自然に必要になります.

問．$\mathbf{R}^m$ で m が 4 以上のときは図に書けないとのことですが，無理すれば書けるのではないでしょうか？

答．無理するのはいやです.

問．$V = \mathbf{R}^m$ の「V」は何の頭文字ですか？

答．容易に想像できるように，Vector space の頭文字ですね.

問．「部分ベクトル空間」とはどのようなものですか？

答．部分ベクトル空間は，とりあえずの理解として,「原点を含む，広がりが途中で切れない，曲がっていない集合」というイメージで良いと思います．ベクトル全体の中で連立１次方程式の解ベクトルの作る解空間などが，部分ベクトル空間の重要な例です.

問．「部分集合」と「部分ベクトル空間」は全く別のものなのですか？

答．別のものです．ある条件をみたすような特別は部分集合を，特に，部分ベクトル空間とよびます．たとえると，$V = \mathbf{R}^m$ は「日本国」です．個々のベクトルは,「日本人」です．でも，日本人全体の集合が，日本国かというと，そうではなくて,「政府」などの組織を含めた有機的統合体が日本国ですね．m

次列ベクトルの全体の集合に,「和」と「スカラー倍」の構造を吹き込んだものが $V = \mathbf{R}^m$ です.「どさんこ」全体は日本人全体の集合の部分集合です.「日本人男性」全体も日本人全体の集合の部分集合です. でも「政府」がないので，部分空間とは呼ばず,「北海道」は，政府 (道庁) があるから部分空間とよぶ, という感じかな.

問. 部分ベクトル空間は有限ですか？１次結合がすべて属するということは，無限ということですか？

答. 「有限」「無限」の意味がはっきりしていないので，質問の意味がはっきりしません.

問. V は V の部分ベクトル空間である，とのことですが，どういうことですか？

答. V は V の部分集合です．(全体も特殊な一部です．) V について部分ベクトル空間の条件がすべて成り立つので，定義から，V は部分ベクトル空間です．V の部分ベクトル空間です．つまり，V は V の部分ベクトル空間である，ということです．何の問題もないですね.

問. 記号 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ の意味がわかりません.

答.

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = \{ c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r \mid c_1, c_2, \ldots, c_r \text{は任意定数} \}$$

が定義です．言葉で言い換えると，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の１次結合として表されるようなベクトル全体のなす部分集合です．これは，部分ベクトル空間です．$\mathbf{0}$ は $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots . c_r = 0$ とすれば表されるし，**１次結合の１次結合は１次結合**なので，部分ベクトル空間の条件の残りの箇所も成り立つからです.

問. $\subset$ という記号がわかりません.

答. $\subset$ は「含まれる」と読みます．$\supset$ は「含む」と読みます．$L \subset V$ は，L が V に含まれる，L は V の部分集合であると読みます．この際，L が V と一致することも許可しています．教科書の補足 A を参照してください．$L \subset V$ を $V \supset L$ とも書きます．同じ意味です.

問. 「属する」ということと,「従属する」ということは同じ意味ですか？

答. まったく違います.「属する」は「所属する」という意味であり，英語でいうと belongs to です. これは，個と組織 (ベクトルと空間) に関する，所属関係を指し示す用語です．$\in$ という記号を使うことがあります．(ちなみに，$\subset$ は組織と組織 (集合と集合，空間と空間) に関する，包含関係を指し示す記号です)．一方,「従属する」は,「１次従属」という文脈で使う場合には，dependent という意味で，個人のグループ (ベクトルの組) の性質に関する用語です．まったく違う意味の言葉です.

問. 「空でない部分集合」とはどういう意味ですか？

答. 「空集合」ではない部分集合という意味です．箱を想像してください．何も入っていないとき，その箱は空 (から) であるといいますね．数学では，空 (くう) である，といいます．空集合は，からしゅごう，ではなく，くうしゅうごう，と読みます．何も元 (げん，要素) のない集合です．元 (もと) も子もないのが空集合です．空 (そら) に太陽があっても，空集合には何もないのです．部分ベクトル空間という場合，空集合を考えるのは空 (むな) しいので除外します．空集合ではないような部分集合だけが予備審査に残ります．さて，その箱に，零ベクトル $\mathbf{0}$ だけが入っている場合，空ではないですね．これは $\{\mathbf{0}\}$ と書きます．$\{\mathbf{0}\}$ は空ではないので，部分ベクトル空間の予備審査をパスします．さらに，本審査 (1), (2), (3) をパスするので，晴れて，部分ベクトル空間であるというわけです.

問. なぜ複素数というものを作ったのですか？現実には存在しない想像上のものを作るには，それなりの理由があるのでしょうが，学生にとっては訳のわからないものです.

答. 便利だからです．まず，複素数まで考えると，代数方程式が必ず解けます．また，波動を表すのに複素数は便利です．ところで，実数は，現実に存在する，と思われがちですが，やはり複素数と同じで，想像上のものと言うことができます．便利だから想像 (創造) するんですね.

問. 高校のベクトルと，今勉強しているベクトルは，どんな関係にあるのですか？

答. 密接な関係にあります．高校で扱うと思われるベクトル $\overrightarrow{PQ}$ (P, Q は，xyz 空間の点) に対し，Q の座標から P の座標を引いて，列ベクトルが作れますね．この対応で，$\mathbf{R}^3$ のベクトルと同一視できます.

問. 前期の線形代数 I と，後期の線形代数 II には密接な関係があるのでしょうか？

答. あります．良く勉強すれば，いずれ分かります.

問. 質問を書けなくても，試験ができれば十分なのだから，質問書の評価は，試験の成績にプラスするだけに利用してください.

答. **試験ができるだけでは十分ではありません．**質問が書けないということは，講義を主体的に深く理解していないということであり，そうすると結局応用が効かず，せっかくの講義の意義が半減すると考えられます．質問書の評価を成績の重要な部分とするのは，このような理由からです．悪しからず.