線形代数学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 6 (No. ５ は欠番) (１９９９年6月２８日) の分
(２００３年5月２５日改訂)

問. 行列式の意味は何ですか?行列式を使うメリットは何ですか?どういう分野で応用されるのですか?

答. 行列式をいきなり定義したので，戸惑ったかもしれませんね．まず，行列式は，面積や体積との関係します．これが，行列式の具体的意味として，一番納得できるのでは，と推測します．教書書の補足 D で説明されていますので，参考にしてください．ですから，重積分 (多次元の積分) の計算でも行列式は必要になります．行列式がないと積分も計算できない，というわけです．それから，クラメルの公式は，連立１次方程式の解の公式ですが，行列式が不可欠です．それと関連して，逆行列の公式にも，行列式が不可欠です．後期の授業で扱う固有値の計算でも行列式を使います．メリットというより，行列式がなければ夜も日も明けぬ，まったくお話しにならない，といったところでしょうか．したがって，あらゆる分野 (もちろん例外はあるでしょうが) で応用されています．数理科学のすべての分野，統計，計算機，情報，エレクトロニクス，数値解析，物理，化学，天文，計測，建築，制御，土木，航空，船舶，生態，医学，地理，経済，会計，金融，心理，教育，など多くてとても書ききれません．(思いつくまま無作為に並べただけですが．) 逆に使わないのは，ほんのわずか，一部の文学と法学の分野ぐらいでしょうか．すこし言い過ぎかな．でも，**線形代数や微積分が，いかに大切な基礎学問であるか，ということは，いくら強調しても強調しすぎることはない**，と確信します．それを勉強できる皆さんは，本当に恵まれていますね．勉強したくても勉強できない人 (とくに貧しい国に生まれた子供たち) が何億人といる中で，こんなに良い大学で，こんなに良い教官の指導のもとで (どさくさに紛れて自画自賛しています) 勉強できるなんて，皆さんは，ほんとうに最高に幸せですね．

問. 行列式はいつごろできたのですか？誰が考えたのですか？行列の発見より前に，行列式は考えられていたそうですが，そんなことは有り得るのですか？

答. 詳細は不明ですが，同僚の J 先生によれば，ライプニッツが，方程式を解くために初めて行列式を導入したそうです．でも，それより先に，日本の関孝和がライプニッツより先に行列式を発見していたそうです．(Y 先生からメールで指摘して頂きました)．関孝和やライプニッツは，かなり昔の人です．明らかに行列の発見より前ですね．行列式は，スカラー，つまり普通の数なので，比較的考えやすい (計算が簡単という意味ではないですが) のに比べ，行列は，スカラーを多次元的，並行的に考えなければならないものであり，かなり高度な概念ですね．概念として高度です．行列というものは，暗に利用されてはいたかもしれないけれど，明確に対象として規定すべき社会的，学問的必要性がなかった，機が熟していなかった，そんな理由から，行列の発見が比較的新しいということでしょうか．このような歴史的事実は，まあ，納得できるかなと私 (石川) は考えます．世の中には,「見えども見えず」，実は見えてはいるけれど，それに気がつかない，ということがたくさんあるのです．関係ないですが，チャンスに後ろ髪なし，後から追いかけても捕まらない，アイディアは透明人間，すぐそばにいても気付かない，などと申します．

問. 行列式の記号 det の意味を教えてください．

答. 講義で話したように，行列式の意味の determinant の頭の３文字です．英和辞典でひいてみてください．

問. 順列の符号は，行列式の定義のためだけに考えられたものでしょうか？

答. そうとばかりは言えない，と私 (石川) は認識しています．でも，順列 (あるいは置換の符号) は確かに行列式と密接に関係していて，一旦，行列式が定義されれば，逆に，順列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ の符号 $\varepsilon(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \pm 1$ は，等式

$$\det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_n}) = \varepsilon(i_1, i_2, \ldots, i_n)\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

がすべての正方行列 $A = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ について成立する，という性質から定まるのです．

問. サラスの方法で行列式が計算できるのがどうしてなのか，わかりません．

答. 行列式の定義そのものです．

問. サラスというのは誰ですか？

答. 知りません．サラスの方法でしか，私 (石川) は存じ上げません．これから説明すると思うクラメルの公式の，クラメルさんも，浅学のため，詳しく存じ上げません．

問. ２次，３次以外の行列式の計算で，サラスの方法のようなものはないのですか？

答. ないです．ですから，基本変形を使って計算してください．

問. ４次以上の行列式は，基本変形を使えば，３次の行列式で計算できることになると思いますが，違いますか？

答． 違いません．その通りです．それが，われわれが行列式を計算する際の基本方針です．

問． 講義の説明で，行基本変形で行列式は c 倍 $(c \neq 0)$，不変，-1 倍，の組み合わせで変化する，という部分がわかりません．

答． 3種類の基本変形によって，行列式がどのように変化するか，という性質，つまり，教科書 pp.60–62 の定理 4.3, 4.6, 4.4 のそれぞれのことを指しています．

問． 高校のとき，determinant が 0 でないとき，逆行列が存在すると教わりましたが，行列式は，逆行列の存在以外に，行列の性質を表していますか？

答． １つ正方行列が，正則でない行列たちの集合から，どの程度離れているか，その度合を，行列式は表していると考えることができます．

問． n 次正方行列 A, B について，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つとのことですが，それでは，$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ は成り立つのでしょうか？

答． 当然予想される質問かと思いますが，成り立ちません．２次の行列式で成り立たないことを確認してみてください．

問． 行列式の計算で，途中の計算で間違えたのに，答はあっていました．偶然でしょうか？

答． プリントの問題の計算ですが，答があっているのは偶然でした．

問． 行列式を基本変形で計算するとき，１次の行列式まで変形していいのですか？

答． よいですが，２次や３次の段階で，定義どおりに (つまりサラスの方法で) 計算することをすすめます．ところで，１次の行列式はスカラー a について $|a|$ と書かれるわけですが，これだと，行列式なのか絶対値なのか区別がつかず，非常に紛らわしくなってしまいます．ですから，行列式の記号は，２次以上の行列式に使用し，１次の行列式は，スカラーそのものに等しいので，スカラーのまま表記するのが賢明と考えます．

問． $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ がなぜかわかりません．

答． 教科書でいうと，p.59 の問４ですね．講義では説明しました．でも，教科書の解答がすこし変なので，もう一度説明しましょう．行列式の定義と比べてみるわけですが，その際，$i_1 = 1$ となる順列以外の順列については，$i_2, \dots, i_n$ のどれかは 1 になりますね．1 はどこかにあるはずだから．そうすると，$a_{2i_2}, \dots a_{ni_n}$ のどれかは 0 になりますね．そういう順列に対応する項について考えると，積 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ は 0 ですね．したがって，$i_1 = 1$ となる順列の項だけが生き残るわけです．あとは，解答の通りです．

問． 教科書 p.17 の問４で，A, B を n 次正方行列に限定しているのはなぜですか？

答． AB も BA も，両方とも定義されるために限定しています．

問． 教科書の p.59 の例３の大きい O の意味がわかりません．

答． 行列のそこで成分が，すべて 0 であるという意味です．

問． 記号 $\leq$ と $<$ の違いはなんですか？

答． 等号を含んでいるか否かの違いです．

問． なんだかいっぱい定義が出てきて，わけがわからなくなってきています．

答． 定義は，いわばゲームのルールです．そのゲームを本当に楽しもうと思ったら，ルールを知らなければダメですよね．でも，ルールを細かく勉強する前に，まず遊んでみて，わからなくなったらルール・ブック (今の場合，教科書の定義，説明など) に目を通す，ということで良いかなと思います．たとえば，教科書の問題を解いていくうち，ああ，そういうことだったのか，こういう風に利用できるから，この概念を，教科書ではこう定義したんだなあ，という具合に，納得がいくようになってきます．

問． 数列 $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{a_n + 5}$ の一般項 $\{a_n\}$ は，行列で解けるそうですが，本当ですか？

答． 本当です．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ の「固有値」を求め,「対角化」すれば良いのです．その際，行列式は基本的な役割を演じます．行列の固有値や対角化というテーマは，後期の線形代数２でお話しします．乞うご期待．

問． 行列式はなぜあるのですか？実生活では絶対使わないと思うのですが．

答． 質問とあまり関係ない話になって恐縮ですが，絶対使わないとは断言できません．というより，原始時代ならともかく，現代のような高度文明科学技術情報化社会では，知らないうちに，行列式の概念なり計算なりを (広い意味で) 使って制作された便利な機器の恩恵を，皆さんも受けていると推測されます．たとえ話になりますが，皆さんが電車で MD の音楽を聞けるのは行列式のおかげ，かもしれませ

ん．要は，行列式がそれほど基礎的なものであるということです．行列や微分積分もそうです．統計もそうです．実生活で使わない日はないと思います．音楽は聞かない，電車にも乗らない，テレビも見ない，電話もかけない，夜は洞窟で暮らします，という仙人のような人が，ひょっとしたら現代でもいるかもしれませんが，でも，その人が，民家から盗んで食べている芋の煮っころがしの，じゃがいもを運んだトラックには，行列式を使って製造されたエンジンが搭載されていたりします．ことほど左様に，私たちは，複雑な現代社会に生きていることを自覚しましょう．いや，われわれは単なるユーザーだから，詳しいことは知らなくていいのだ，使えればよいのだ，という意見もあります．一見確かに，そうかも知れません．でも，ユーザーも，考えてみれば，他人が苦労して作り上げた製品なり情報なりを享受するわけだから，それと引き替えるための対価を自分で手に入れなければなりませんね．それを得るには，ある分野で，他の人にはできない，他の人がわからない，素人ではとても手がでない，というようなことを実行して，つまり，ある職業に従事して収入を得るわけですね．その際，行列式 (これはもののたとえですが) のような基本的なものを知らない人物を，企業は採用しないでしょう．行列式も知らないで，うちの会社の面接に来るなんで１０年早い，と言われるかもしれませんね．(そんなことは言われないかな．) まあ，一旦は (間違って？) 採用しても，リストラするかもしれません．なぜなら，日々新しいことを開拓していかなければ，企業が利益を獲得できない現代の競争社会で，これは難しいからわかりません，**基礎がわからないからお手上げ**です，では生き残れないからです．いや，必要になればいつでも勉強するさ，という人がいるかもしれません．でも，若い今できない人に，中年になって，それができるということは期待できない，と考えるのが普通でしょう．この点は冗談ではすまされないことですね．いや，高収入など要らないから，適当にバイトで稼いで，あとは趣味に生きます，という人もあるかと思いますが，その趣味のバンドの音響の計算に，行列式を使わざるを得なくなったり，あるいは，趣味のつりで，つりざおの強度を行列式で計算しなければならなくなったりするかもしれませんね．

問．教科書の定理はどれくらい覚えた方が良いですか？

答．覚えるというより，使いこなせるようになるように，問題を解いてみることを薦めます．問題を解いていくうち，忘れようとしても忘れられないようになります．それくらい時間をかけて勉強してください．ただ覚えるというのは，いわば「手抜き」です．あとに何も残りません．**試験の後で空しさだけが残ります**．

問．予備校に通っていた頃，そこの講師が,「大学時代に行列をしっかり勉強しておけば良かった」と言っていました．これから２年になるうちに理解したいですが，どんな風に将来行列が僕を襲ってくるか不安です．

答．そうですか．暴走族の行列に襲われるみたいで，こわいですね．むかし見た映画「チャイニーズ・ゴースト・ストーリー」に出てきた，金の大仏の行列 (記憶が定かでないけれど) がこわかったのを思い出しました．それはともかく，私 (石川) の講義を聞いて，教科書をよく読んで，予習復習を欠かさなければ，まったく no problem です．

問．テストは計算主体ですか？証明主体ですか？

答．質問には答えませんが，ともかく，教科書の問題やプリントの問題が，納得づくで解けるようになっていれば，テストは大丈夫です．ただし，説明不足だと減点します．それは，本当はよくわかっていない，あるいは，類似の問題の解答をたまたま丸暗記してきたのでは，などと推測されてしまうからです．ですから，時間が許す限り，自分はこんなに勉強して，わかっているんだ，とアッピールするように，答案用紙にくわしい説明を書いてください．ただし，その際，関係ないことや，明らかな誤りを書くと，やはり，これはわかっていないな，と推測され，減点されます．そういうことなので，ともかくがんばってね．試験時間は９０分を予定しています．

問．なぜ質問と補足を分けて書かなければいけないのですか？２つに分けるとかえって書きにくいです．

答．書きにくいから良いのです．つまり，まず質問を書いて，それをなぜ質問するに至ったかの経緯や背景を自らに問い直す行為，それ自体が皆さんの勉強になるわけです．ですから，補足説明のないものは原則的に 0 点と評価しているはずです．ただし，良い質問の場合は，例外的に加点することはあります．でも一方，質問と補足説明を分けて書いてあれば，それがどんなにくだらない質問であっても，1 点はあげているはずです．(「くだらない質問」というのは，質問させておいて皆さんに対して失礼ですね.「苦し紛れの質問」と言い直しましょう．)

解答者からの励ましとお礼：皆さんの質問は非常に参考になります．感謝しています．また後期も引き続きよろしくお願いします．それから，すべての質問に答えられなかったのは，私 (石川) の力の無さです．許してください．さて，質問書は合計４回提出してもらいました．これにテストの成績を加味して成績をつけます．比率は，先に公表してあるように，質問書４，テスト６の割合です．かなり質問書のウェイトが高いので，うまく質問が書けなかった人は，試験で奮起してください．質問がうまく書けた人も，油断なく準備してください．なお，やむを得ず都合が悪く受験できない人は，早めに申し出てください．別途試験をします．(その際，試験時間は 60 分で，少し問題が難しくなるよう配慮しますので，できるだけ７月１２日のテスト (９０分) のほうを受けてください．)