線形代数学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. ４ (No. ３ は欠番) （１９９９年5月２４日) の分

(２００３年5月２５日改訂)

問．基本行列を考える利点は何ですか？何だか話が難しくなっていくだけで，利用価値に乏しいように思うのですが.

答．連立１次方程式をはき出し法で解く場合，行基本変形というものを繰り返し使いましたね．その１回１回の行基本変形を考えてみると，それは，行列から別の行列を作る操作，あるいは手続き，あるいは行為です．操作や手続きや行為は，物ではなくて，なにか抽象的な概念です．でも，抽象的概念では，実際，扱いにこまるし，厳密な議論もしづらいので，数学では，そのような，操作自体のようなものも具体的対象として，物とみなす，ということを行います．何でも客観視するんですね．数学が嫌われるとしたらこれが理由かもしれませんね．でも，客観視すべきときには客観視する，というのが知性ですね．必要のないときは問題ないですが，必要な時に冷静にものが見られないというのは，不幸なことです．世の中の不幸は，ほとんど，ここから生まれると言っても過言ではない程です．それはともかく，今の場合，基本変形という操作を，基本行列の積に置き換えていることが，客観視の具体的意味あいです．そうしないと話が先に進みません．基本行列を考えるメリットは，漢方薬のように，あとからだんだん効いてきます.

問．基本行列の F, G, H は何の略ですか？基本行列は覚える必要がありますか？

答．F は fundamental (基本的な) の頭文字です．基本行列には３種類あるので，他に，G と H を使っています．覚える必要はありません．ここでは，基本変形と行列の関係について認識してもらえば十分です，基本行列はそれを説明するために補助的に導入しました．ところで，質問と関係ないですが，これを覚えよ，なんていう権利も義務も，もともと教官 (教師) にはありません．他の人の頭の中に土足で踏み込むことはできないからです．(靴を脱いでもダメです．)

問．$AG_n(i,j;c)$ が A の第 j 列に第 i 列の c 倍を加えた行列になる，という部分がよくわからなかったので教えてください.

答．計算したらそうなる，という説明を講義でしましたが，それでは納得しないという意味ですね．それならば，こう説明したらよいかもしれません：基本行列 $G_n(i,j;c)$ は n 次単位行列 $I = I_n$ の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えてできたものでした (教科書 p. 36) ね．でも，同じ行列は，見方によっては，I の第 j 列に第 i 列の c 倍を加えてできたとも思えますね．一般に行列 A に $G_n(i,j;c)$ を右から掛ける場合，$G_n(i,j;c)$ を列ベクトルの集まりとみなして計算する関係上，列基本変形に対応することになるわけです，という説明ではどうでしょう？

問．基本行列は正則行列である，という証明はどうすればできるのですか？

答．教科書 p. 39 を見てください.

問．$F_n(i;c)G_n(i,j;c)$ は，G_n の i 行を c 倍したものですか？それとも，F_n の j 列に i 列の c 倍を足したものですか？

答．良い発想ですね．でも，どちらで考えても同じことです.

問．行列 A を行基本変形して，階段行列 B になるという仕組みを習いましたが，逆に，B を変形していって，A を求めるということもできるのですか？それは，逆行列と関係しますか？

答．良いところに気がつきましたね．できます．逆にさかのぼっていけば良いわけです．講義で最後にのべたように，正則行列 P を適切に選ぶと $PA = B$ という関係にありますから，その関係式の両辺に P^{-1} (P の逆行列) を**左から**掛けると，$A = P^{-1}B$ となります.

問．ある行列が正則行列といったとき，逆行列をもつ正方行列だという意味だけととっていいのですか？正則であると言われたときに，イメージが浮かんでこないのですが.

答．その通りです．逆行列をもつという性質は都合の良い性質なので，正則 (regular) と言います．正則でないのは irregular (イレギュラー) です．野球などで，地面にあたったボールが不規則に跳ね返ることを，イレギュラー・バウンドとよびますが，これは扱いが難しいんです．プロでも難しい．同じように，正則でない行列を扱うときは細心の注意が必要なので，細心の注意をはらってください.

問．復習をしていて思ったのですが，正則行列のところで,「$AX = I, XA = I$ という行列の方程式が解けるような行列 A を正則行列という」とありますが，この場合 X も正則行列となるのでしょうか？

答．よく気が付きましたね．$X = A^{-1}$ であり，これも (定義から) 正則行列になります．教科書 p. 10 定理 1.1(1) を参照ください.

問．行列の階数を調べる場合，階段行列にまで変形しなければいけないですか？途中まででわかる場合はどうしたらよいですか？

答．途中でわかる場合は，そこまででも，もちろんよいです．ただし，テストで「階段行列に変形して階数を求めよ」と問われたら，もちろんその指示に従うことを薦めます.

問．行基本変形で計算するとき，３つの行を１度に使って変形しても正確な答が導き出せますか？

答． 危険です．もし正しい答が出ても，それは偶然の可能性があります．あくまで基本にのっとり，基本変形だけを繰り返して計算することを薦めます．

問． 連立１次方程式をはき出し法で解く場合，拡大係数行列の行どうしは入れ替えてよいと学びましたが，列の入れ替えはよいのですか？反則ですか？

答． 反則です．

問． 階段行列を表す記号はないのですか？階段行列それ自体はそんなによく使わないのですか？

答． 記号はないです．そうですね，補助的な概念であるといえるかもしれません．我が輩は階段行列である，名前はまだない，というところでしょうか．

問． 階段行列は何か数学的に重要な意味があるのでしょうか？たとえば単位行列に近いとかいうような?!

答． 正方行列に関しては，良い発想のように思えます．でも，この質問は，時期尚早かと思います．後期で，行列に対応する線形写像 (１次写像) の像の基底を選ぶということを学ぶのですが，実は階段行列は，このことと非常に関係します．それまで待っていてください．

問． いつもはきだし法を使って計算すると，途中で先生のやりかたと違うし，結局，答も違うんですが，それが計算ミスなのかわかりません．何通りもやり方があるのですか？

答． 途中経過は何通りもあります．でも，計算結果は決まるはずなので，それが違うのは，残念ながら計算間違いと思います．計算したら，必ず検算する習慣をつけるとよいかなと思います．

問． 教科書 p. 34 (2) で，$\mathrm{rank}A < n$ となると解が無限個あるのに，$m < n$ でなければ，常に無限個ではない，というのはどういうことですか？

答． 常に無限個ではない，と質問にありますが，常に無限個とは限らない，ということになりますから，$m \geq n$ の場合は，解が無限個のこともあるけれど，自明な解だけのときもある，という意味になります．

問． 同次形という言葉の意味を教えてください．

答． １次方程式が同次形というのは，１次の項以外の，０次，つまり定数項 (未知数を含まない部分) が 0 であるという意味です．ですから，行列を使って，方程式を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書く場合，同次形なのは，$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のときになります．

問． $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解が，自明な解だけをもつ，あるいは解が無限個ある，という情報しか，A の行基本変形から得られないのでしょうか？

答． 以前学んだように，はき出し法で，具体的に方程式が解けてしまうのですから，実は解のすべてがわかります．でも，「木を見て森を見ず」ということがあります．絵を画く人は，ときどき自分の絵を２，３歩さがって眺めてみるそうです．そうして，全体のバランスを見るそうです．人生でも公共事業でもそうありたい，永六輔さんが，そう言っていました．それと同じことで，われわれの場合は，いろいろな方程式が，大きくどのように分類できるか，ということを，階数という観点から論じたのです．

問． 教科書 p.29 の 2.3 節 (4) がよくわかりません．

答． 具体的な方程式を解くための手段としてではなく，あくまで，「理論的な説明の手段」として，(最後の列以外の) 列の入れ替えをしたわけです．

問． $\mathrm{rank}A < n$ のとき，すべての解が無限になるとは思えないのですが．

答． すべての解が無限になる，わけではなくて，解が無限個あるということです．個数が無限なのです．誤解しないでください．

問． 「線形代数学 = 行列」なのですか？教科書にはずっと行列しか出てこないのですが，後期の線形代数学 II になったら違うこともするのでしょうか？

答． 確かに**線形代数の基本は行列である**と言えます．でも，その際，行列を掛けるという演算の持つ “**線形性**” に注目する必要があります．また，後期には，ベクトル空間と線形写像という観点から，もう少し抽象的に学問します．つまり，行列を，もっと深く，もっと楽しく研究すると言うこともできます．

問． 「非線形代数」なるものがあると聞きましたが，線形代数とどのように違う数学なのですか？

答． 私 (石川) は浅学のため，「非線形代数」なるものを聞いたことはありません．「非線形解析」というものはあります．「非線形幾何」というのも，「多様体論」の意味と思えば，ありえます．まあ，「非線形数学」というのは，スローガンとして，(啓蒙的に) 言われることがあるので，ひょっとすると「非線形代数」もあるんでしょうかね．

問． 高校の時，先生に，積分はもともと酒だるの体積を求めるためだ，と教わり，数学に親しみを感じました．行列についても (あるいはどんな分野でもよいですが) そのようなエピソードがありますか？

答． 私 (石川) は浅学のため，残念ながら知りません．何かわかったら，お知らせします．ところで，以下は冗談ですが，酒だるが，製造年と製造月別に縦横に (行列と合わせるなら，横縦に，ですか) 並んでいる場合，それぞれの樽の体積を記録したら行列になりますね．少し強引ですか．酒がきらいなひとには，ジュースの樽にしますか．ジュースの樽なんてないかな．

問． $\therefore$ と $\because$ の意味を教えてください．

答． $\therefore$ は，よって，とか，したがって，とか，だから，とか，Therefore，とか，Thus，とか，Hence,

といった意味に使います．つまり結論です．また，∵ は，なぜならば，とか，どうしてかというと，とか，そのわけは，とか，Because，とか，Since，とか，As，といった意味に使います．つまり理由です．これらの記号は，テストやレポートでは自由に使ってよいですが，フォーマルな場 (冠婚葬祭の案内状など) では差し控えたいですね．

問． 行列と統計，行列と微積には関係がありますか？私には数学の中で行列だけが独立した分野のように思えて仕方がありません．

答． 私 (石川) はそうは思いません．たとえば，統計と関係して，「多変量解析」というものがあり，多くのデータを統計処理するときには不可欠なのですが，行列を知らずして，多変量解析を理解することは不可能です．なお，このことについては，質問書の解答 No.1 の最初の解答も参照ください．また，多変数の関数の微分のところでは，ヤコビ行列というものが登場すると思います．微分は，一言で言えば，**線形化**であり，行列と無関係どころか，そのものといっても言い過ぎではない程です．(いずれこのことは皆さんにも理解してもらえる時期が来ると期待しています．) ですから，行列だけが独立しているということは決してありません．**数学はひとつ**です．いろいろな分野が有機的に結びついているのが数学です．学びはじめには，まだ知識がなくて，ばらばらな印象を受けても仕方ないかもしれませんが，物事が見えてくると，ああ，これは，実は，あのことと関係していたんだ，それについては，あの時は，わかったつもりだったけれど，本当はこういうことだったんだ，途中で投げ出さずに，勉強を続けていて良かった，ということになります．そうなると良いですね．

問． 統計学はどう思いますか？統計学は数学と言えるか疑問に思います．先生は数学であると認めますか？

答． 私 (石川) は統計学にはそれほど詳しくないのですが，私 (石川) の考えでは，統計には，実用的部分と理論的部分があると思います．そのうち実用的部分は，確かに，数学とは言い難いと思います．それは，実用的価値があるから良いわけです．一方，統計学の理論的部分は，数学の基礎理論に根差していて，十分数学としてもおもしろい部分もあると思います．私 (石川) は認めています．それに，数学とは何かといった線引きは，そもそも不可能であるし，あまり意味がないとも考えます．以上が私 (石川) の意見です．私 (石川) の意見に惑わされることなく，あとは，どうか自分で判断してください．

問． 実数や複素数以外に数があると聞きましたが，それはどんなものですか？ロシアのなんとか先生が発見したと聞いたことがあります．

答． Hamilton (ハミルトン) の発見した **４元数**，Cayley (ケーリー) の発見した **８元数**というものがあります．(実は，８元数は，T. Graves という人が最初に発見し，Hamilton へ手紙で報告したそうです．それを Cayley が再発見したそうです．Y 先生から教えて頂きました．参考文献：H.‐D. エビングハウス他著，成木勇夫訳「数」下，シュプリンガー・フェアラーク東京, p.294)．でも，Hamilton はアイルランド出身であり，Cayley もスコットランド出身と記憶しています．(Cayley は少年時代はロシアに住んでいたとのことです)．ところで，行列を発見したのも Cayley ですね．(質問書の解答 No.1 参照．) Cayley 先生は実は私 (石川) の尊敬する数学者の１人です．日本ではあまり Cayley 先生が他の数学者とくらべて正当に評価されていないのが気になります．これは日本の数学界の限界を示しているのでしょうか？そんなことはないかな．ところで，私 (石川) の研究室にあるパソコンの名前は Cayley 君です．この解答書も Cayley 君がコンパイルしています．

問． 化学の授業で出てきた，エルミート (Hermite) 性とは何ですか？

答． 化学の先生は線形代数で勉強せよ，とおっしゃったとのことですが，線形代数の講義では，後期に詳しく学ぶことになります．化学ではどのような文脈で登場するか詳しくは私 (石川) にはわかりませんが，(エルミート) 内積が関係していれば，エルミート性とは，内積に関して対称 (自己共役) というのが，通常の意味あいです．ところで，私 (石川) なら講義で必要なことはその場で簡単に説明しちゃいますが，それも善し悪しで，「自分で調べる」(いろいろな人に質問する，書物にあたる，internet で検索するなど) ということの教育的効果も絶大です．自分で調べて身に付けたことが本当の知識になるんですね．

問． テストは計算問題 only ですか？語句説明問題などは出るのでしょうか？授業でやらなかったところ (たとえば補足の部分) はテストに出ますか？

答． そう問われると，その「語句説明問題」も出してみたくなりますね．でもまだ考えていません．ともかく，教科書をよくよんで，教科書の問題を解けるようになっていれば何の心配も要りません．なお，補足の部分は，もちろん大事なので，各自読んでおいてほしいのですが，講義では扱わないので，いまのところテストの範囲からは外す予定です．

問． そもそも行列は誰が考えて，今どのように使われているのだろう，と思いましたが，すでに質問されていて，解答のプリントに書いてありました．人の疑問はとても参考になります．

答． そうですね．皆さんの質問とその解答をまとめて，わざわざプリントにして配っている理由は，(私 (石川) 自身の楽しみであることを抜きにすると，) **他の人がどういう質問をしているか，それに対してどう答えられているか，ということを皆さんに知ってもらいたい**，ということにあるのです．