線形代数学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ２ (１９９９年５月１０日) の分

問. 連立１次方程式を「はき出し法」で解くメリットは何ですか？高校で習った方法の方が早く解けるのではないですか？

答. 連立１次方程式を早く解くのに，高校で習ったやり方 (代入法？) と講義でやったはき出し法のどちらが適しているか，と問われたら，高校で習ったやり方のほうが早い場合も確かにあるでしょうね．でも，ちょっとばかり早く解くことに重要性がそれほどあるとは思えません．早いのが取り柄なのは，新幹線と月の家円鏡 (つきのや・えんきょう，現在の橘家円蔵) ぐらいです．(このネタは古いので皆さんにはわからないかと思います．)「ウサギ」と「カメ」はどちらが良いか？これは，あまりよいたとえじゃありませんね．２つの解法を比較すれば，何でもよいから解ければいいだろうという立場と，背後にある “からくり” に注目する立場の違いと考えられ，そうすると，その違いは，浅はかさと，思慮深さの違いなので,「キリギリス」と「アリ」にたとえた方が良いかも知れません．ともかく，はき出し法に注目することには，深いわけがあります．連立１次方程式の解法を，行列の基本変形という観点からとらえることは，これからの講義を聞いてもらうとわかると思いますが，理論上の大きなメリットがあります．とりわけ，基本変形という操作が，行列をかけるという操作に還元されることは，これはもうすごいことです．はじめは気がつかないかも知れませんが，そのメリットは，ボディーブロー (格闘技の K1 ならローキックと言ってもよい) のように，あとからだんだん効いてきます．驚くべきことに，こうして行列を使うことにより，連立１次方程式は完璧に理解されてしまうのです．行列と連立１次方程式のこのような理論を学ぶことは，皆さんの今後にとって，とても有意義な知的体験になるかと思います．

問. はき出し法で解ける限界はありますか？

答. ありません．式の個数，未知数の個数に制限なく適用できる一般的な方法です．もちろん,「解なし」という場合もありますが，その場合は，解がないということが，具体的手続きでわかります．

問. はき出し法で解く場合，どんな行基本変形をしたかの説明を書かなくてはいけないのですか？

答. テストでは，皆さんが本当にわかっているかどうか知りたいので，必ず書いてください．ですから，普段から書くよう心がけるとよいかもしれませんね．

問. 解答をどの程度まで簡略化しても許されますか？

答. 連立１次方程式をテストで解く場合のことと推測します．教科書の解答のように書いても，もちろん良いです．ただし，その書き方は，省スペースのために考え出されたという経緯があります．私 (石川) が講義でやっている書き方は，スペースはとりますが，列をそろえて書くので，計算ミスが少なく，より見やすいのではないかと思います．No.1 で「計算ミスをなくすにはどうすればいいですか？」という質問がありましたが，このように，いろいろ工夫しているわけです．

問. はき出し法で，$x_1, x_2, \ldots$ の係数がすべて 0 になったらどうなりますか？

答. 右辺が 0 でなければ，これは矛盾ですね．したがって，そのような方程式をみたす $x_1, x_2, \ldots$ は存在しないので,「解なし」ということになります．右辺が 0 の場合は，何の情報もない式だから，その式は無視して，その他の方程式に注目すればよいわけです．

問. はき出し法で，行列を行基本変形する場合，講義では，行列を ( ) でくくっていないですが，いいのですか？

答. 計算の途中は，フォーマルな場ではないので許されると考えます．最終的な解答を行列として書く場合は，括弧でくくってください．

問. はき出し法で，分数が出てきたりするのはよいのでしょうか？

答. もちろんよいです．でも，分数の計算にもし自信がなかったら，なるべく複雑な分数計算が出てこないように，行の入れ替えなどの基本変形をよく考えて実施すればいいかなと思います．

問. 与えられた方程式が，求める未知数の個数よりも多いときにはどのようにしたらよいのでしょうか？

答. 同じはき出し法で解くことができます．心配ご無用.

問. 解が１つに限定される方程式と，限定されない方程式を見分ける方法がありますか？

答. 階数を調べればわかります．後で説明します.

問. ２つの行を入れ替えるのは何のためにやるのですか？２つの行を入れ替えても解に影響はないのですか？はき出し法で，行を入れかえると計算が楽になるのはどんな場合ですか？

答. 確かに，いまのところは，無理すれば使わなくても方程式が解けます．でも，２つの行を入れ替えるのは，単に方程式を書く順番を取り替えるだけで，方程式としては本質的に何も変わらないから，どんどんやっても良いですよね．そして，入れ替えをすることによって，階段行列にまで変形できるので，のちのちの見通しがよくなります.

問. 階段行列の定義の説明がよく理解できません．教科書 p.26 の階段行列の定義が読んでもなかな

か良くわかりません．

答． 階段行列の一般的な定義は確かに難しいですね．でも，まず行基本変形の具体例をいくつか計算してみて，どこまで行列を行基本変形で簡約化できるかに慣れてくると，階段行列をどう定義すればよいかもなんとなくわかってくると思います．その後で，もう一度教科書を読み返すと良く理解できるかなと思います．

問． 行列を行基本変形によって階段行列にできるとのことですが，もとの行列の情報はその中に残るのですか？

答． 階数の情報が残ります．もとの行列の行のうち，本当に "独立" なものが何本あるかという情報が残ります．

問． 階数 (rank) の意味がわかりません．rank は何に使うのですか？階数を考えることにどういう意味があるのですか？

答． 階数は，連立１次方程式の理論上もっとも大切な "指標" です．与えられた方程式が，解けるか，解けないか，解けるとしたら解はただ１つか，それとも任意定数を含むのか，といったことが，階数の情報だけでわかるのです．階数は実に偉いんです．

問． 3×3 行列の逆行列を求めることができれば，もっと機械的に連立１次方程式を解くことができると思うのですが，3×3 行列の逆行列を求めるのは難しいですか？

答． 確かに，理論的にはそうですね．良い疑問ですね．教科書の p.73 のクラメルの公式がそれに該当すると思います．しかし，具体的な方程式を解くには，はき出し方が，より簡潔かつ一般的な方法のようです．実は，逆行列を求めるのにも，はき出し法が応用できるのです．このことは，一般の n 次 (つまり $n \times n$ 型) 正方行列にあてはまります．

問． 対称行列や交代行列は，講義ではとばして次の章に入ってしまったのですが，必要ないのですか？

答． 講義で述べるのを忘れました．教科書を読んでください．でも，必要な時点で講義で説明しますので，ご心配なく．

問． 転置行列は何のためにあるのですか？必要性がないような気がしますが．

答． 第４章の行列式の計算のところで使います．また，後期で勉強する，内積，対称行列，直交行列などの部分では，必須の概念です．

問． はき出し法という単純作業を私達が練習するのはなぜですか？ある程度の練習はしてもよいが，高校のときから，けっこうな量の練習をさせられてきたのに，これ以上練習する必要があるのでしょうか？

答． 君がどれだけ練習したか私 (石川) は知らないので，なんとも言えませんが，単純なはき出し法については，これ以上練習してもらう予定はありません．むしろ，その方法を応用して，行列の階数を具体的に求めたり，逆行列を具体的に求めたりする練習をしていきます．あくまで，具体的に役に立ち，理論を理解するために必要最小限の計算練習のみを，講義では取り上げていきます．それ以上の計算練習については，皆さん個人の判断にゆだねたいと思います．(足りないと思う人は，教科書の他の問題を解いてください．)

問． 数ベクトルは，どのあたりがベクトルなんですか？数ベクトルと，高校で習ったベクトルには関係があるのでしょうか？

答． 教科書の補足 A を読んでください．

問． 教科書の補足 A は，とても当たり前のことを扱っていますが，結局何を説明しようとしているのかがわかりません．

答． 数ベクトルと，高校で習ったベクトルの関係を，あざやかに説明しています．

問． 教科書 p.11 の ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$ の証明の部分がよくわかりません．

答． どの箇所がわからないか，わからないのですが，たとえば ${}^tA$ の (i,j) 成分を a'_{ij} と書いたのは，A の (i,j) 成分を a_{ij} と書いたのでそれと区別するためです．そして，転置行列の意味を考えると，a'_{ij} は A の (j,i) 成分，すなわち，a_{ji} に等しいわけです．こんな感じで読んでみてください．

問． 行列をグラフのように視覚的にとらえることはできないのでしょうか？

答． できないと思います．

問． むかしから大学の先生に聞いてみようと思っていた質問ですが，$\frac{1}{9} = 0.111\cdots$ だから，$\frac{9}{9} = 0.999\cdots$ となって，$\frac{9}{9} = 1$ にならないのはなぜですか？

答． $0.999\cdots = 1$ ですから問題ありません．$0.999\cdots$ はいつまでたっても 1 にならないじゃないか，と思うかもしれませんが，もともと無限小数は，数列の極限を表しているのです．つまり，$0.999\cdots$ という数は，$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots,$ という数列の極限を表しているのです．そう考えれば，$0.999\cdots$ は明らかに 1 に等しいですね．

問． 数学でめしを食っていくにはどうしたらよいですか？それから，いままで数学をやってきて，苦痛を感じたことはありますか？

答．自分の箸に「数学」と書くとよいかもしれませんね．少しだけまじめに答えると，職業は好きなことを選ぶべきですね．嫌いなことは職業に選ばないほうが良いですね．まあ，職業だから，基本的に好きなことであっても，いやなことをしなければいけない時もあるでしょうが，好きなことだったら，まあ我慢ができます．それに，苦しいことを乗り越えたときの達成感は仕事の醍醐味ですね．そのために，多少の才能，センスは必要ですけどね．あとは粘りですかね．これは数学に限らず，どんな分野，仕事でもあてはまることですね．世の中そんなに甘くはないよ，と答えておきましょう．

問．１次変換はどこでやるのですか？新課程になってやらなくなった１次変換は利用価値がなくなって消えたのでしょうか？

答．１次変換 (線形変換) は後期で扱う主要な素材です．１次変換は，数学において欠くことのできない重要な概念です．１次変換を知らないで，数学を勉強したとは言えないほどです．利用価値がなくなったどころか，将来ますます必要になるものです．ただし，１次変換を勉強するためには，行列と連立１次方程式の理論を知っておく必要があるので，行列と連立１次方程式を前期にやり，１次変換は後期にあつかう構成になっています．さて近年，高校で習う内容が猫の目のよう変わっていますが，本当に高校生のことを真剣に考えて行っている行政かどうか，大いに疑問です．４文字熟語で「朝令暮改」というから，昔からあることかもしれませんが，これでは，大学で数学を教えている側もやりづらくて仕方がありません．あまり数学のことを知らないかもしれない一部の人々と，数学を知りすぎたかもしれない一部の大先生が，数学関係者全体の良識とは無関係に，やや暴走して高校の指導要領を決めていると言えば，それは極言でしょうね．私 (石川) は政治的な趣味はありませんが，冷静に考えて，現状を憂いています．まあ，お互い注意して，こんな現状には惑わされないようにしっかり生きていきましょう．