線形代数１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
レポート (２０００年７月３日) の分

問. 行列式が４次以上になったら計算は可能なのですか？
答. 可能です．行列の基本変形で行列がどう変わるかがわかるので，その性質を使って計算できます．講義で詳しく説明します．
問. 行列式とは一体何なのか，と聞かれたら反応できません．
答. 行列式とは，行列に対し決まるスカラーであって,「多重線形性」と「交代性」を持つもののうち，単位行列の行列式が 1 であるように正規化されたものである，と答えてください．
問. 行列式を計算する時のコツみたいなものはありますか？
答. 連立１次方程式を掃きだし法で解くときと同じように，よく考えて基本変形を使って，成分に 0 を増やすことを心がけてはいかがでしょう．
問. 列基本変形の使い道を教えてください．
答. 行列式の計算に使うことができます．行列式は，列基本変形についても行基本変形をしたときと同じ性質を持つからです．方程式を解くときは，行基本変形だけを使いましたね．でも，行列式の計算では行基本変形も列基本変形も混ぜて使うことができるのです．
問. 行列式の積はどのように計算するのですか？
答. 常に $|A||B| = |AB|$ が成り立つので，質問書にあるように，どちらで計算しても同じです．正しい計算方法です．
問. 行列式の章で，転倒数が偶数だと符号が $+1$, 奇数だと -1 にするのはなぜですか？これは単なるつじつま合わせですか？
答. 単なるつじつま合わせではありません．-1 を偶数回かけるか，奇数回かけるか，ということで決めているだけです．-1 の偶数乗は $+1$ ですね．ところで，皆さんは，-1 掛ける -1 がどうして $+1$ になるか説明できますか？
問. 行列の掛け算では，かける順序によって答えが変わるというのは，考えてみると，同じものをかけ合わせているだけだから同じものになるのではないかと考えてしまいます．どのように考えればよいのですか？
答. 「かける」ということを，普通の数の場合と同じように考えがちなので，そういう錯覚に捕らわれるのかな，と思います．連立１次方程式の解法で，基本変形を,「行列を掛けるという操作」に置き直せることを講義で説明しましたね．また，これは線形代数 II の内容ですが，行列は,「１次変換」と密接に関係していて，行列の積は,「１次変換の合成」を表現しています．このような「操作」とか「変換」というものは，その順序を違えてしまうと，結果が変わるのが普通です．たとえば，自動販売機で，お金を入れてからボタンを押すのと，ボタンを押してからお金を入れるのを比べると，明らかに結果が違ってきますね．一方は，美味しいウーロン茶が飲めるのに，もう一方は，いくらお金があっても，何も飲めなくて，のどが乾いて死んでしまいますね．これは大きな違いです．
問. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ が自明でない解をもつための条件のところで，どうして $A - \lambda$ と書かないで，$A - \lambda I$ と書くのですか？
答. λ はスカラーであり，A と型が違うので，引き算が定義されていないからです．たとえば，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2$ と書かれても，何のことかさっぱりわかりませんね．これでは世の中に通用しません．ですから，(A と同じ型の) 単位行列 I を使って，$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ と書き直し，$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と書いたわけです．
問. 方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ が自明でない解をもつための λ の条件を求める問題で，テキストの解答の最初の $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ というのがどこから出てきたのかわかりません．
答. 方程式は，$\lambda I\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ ということなので，$\left(\lambda I - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解をもつ条件を求めることになります．この $\lambda I - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ です．
問. 教科書に「違う型の行列どうしの和は定義しない」と書いてありますが，どうして定義しないのですが. $(1,1)$ 成分は，$(1,1)$ 成分どうしの和などとし，片方にしかないものはそのままにしておく，という計算を定義してもよいのではないですか？こうすると，他の計算に支障がでますか？
答. 確かに定義できないことはありませんが，型が同じ場合しか世界基準が決まっていません．ですから，いくら自分で定義したとしても，使う度にいちいち説明しないと他の人には通用しませんね．
問. 掃き出し法以外で逆行列は求めることはできないのですか？
答. できます．行列式を使って計算する方法がありますが，計算量が増えます．

問． 逆行列の求め方はわかるのですが，逆行列が何を意味しているかよくわかりません．何を求めるときに使うのですか？

答． 逆行列は，スカラーでいうと逆数のようなものです．逆数がないと，$2x = 3$ が解けませんね．それと同じで，たとえば，正則行列 A について，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解くと，逆行列を使って，$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$ となります．

問． テキストでは，行列を階段行列にするやり方は１通りには決まらない，下には求め方と解答の例を示すとありますが，私の解き方もその通りテキストとは異なるものとなり，また答もテキストより少々複雑になりました．これでもいいのですか？

答． 確かに，行基本変形をくり返して階段行列にする方法は幾通りもあるので，決まりませんが，最終段階の階段行列は１通りに決まるはずです．たぶん計算間違いでしょう．

問． 基本行列の覚え方ですが，F_n を T_n (times, 〜倍), G_n を P_p (plus), H_n を C_n (change) などとしたほうがおぼえ易いのではないでしょうか？

答． なるほど．でもこんな質問ができる程わかっていたら，もう覚えなくても十分かなと思います．

問． 正方行列 A が対称行列 B と交代行列 C について $A = B+C$ と表されたとき，$B = \frac{1}{2}(A+{}^tA), C = \frac{1}{2}(A-{}^tA)$ となることの証明が納得いきません．

答． ${}^tA = {}^tB + {}^tC = B - C$ となるので，これから B と C を A を使って表しただけです．

問． いままでやってきた行列はベクトルとどう関わっていくのですか？

答． 「ベクトル」というのはいろいろなイメージでとらえることができますが，それの持つデータとしては，数ベクトル，つまりスカラーを縦か横に並べたものと考えられます．ですから，ベクトルは行列の特別の型のものとみなされるので，当然関わっているわけです．また，線形代数 II では,「ベクトル空間」の線形写像を表現するものとして行列が登場します．いま使っている教科書の続編の「線形写像と固有値」石川他著，共立出版，に詳しく書いています．読んでみてください．

問． 行列で解けるのは連立１次方程式だけですか？連立２次あるいは３次方程式は解けないのですか？

答． うむ．解けないこともないのですが，行列を使って解ける場合は，結局，連立１次方程式に帰着させて解いているということになります．それほど行列 (線形代数) は基本的で応用範囲が広いということです．

問． 理系にいる友人に行列を教わったとき，ハミルトン・ケーリーの定理は行列で重要なのだと聞いたのですが，どのようなもので，何のために使うか聞きそびれてしまいました．教えてください．ジョルダン標準形とは何ですか？

答． いま使っている教科書の続編の「線形写像と固有値」石川他著，共立出版，に詳しく書いています．

問． 授業ではなく数学者としての先生に質問があります．現代の数学者はどんな研究をしているのでしょうか？やはり過去の数学者たちのように新しい分野を発見しているのでしょうか？それとも，数学はすでに完成された学問であって現代の数学者は過去の学者の業績を解剖する作業をしているのでしょうか？後者であるとしたらどうやって？文学などは一つの作品に様々なアプローチの仕方があるのかもしれませんが，答が一つの数学に様々なアプローチが可能なのですか？やはり前者なのでしょうか？あるいはどうちらでもないのでしょうか？

答． 新しい分野，理論，定理を発見しようとしています．もちろん過去の学者の業績を研究してヒントを得ることも必要ですが，それは，あくまで新しいことを見つけるため，新しい視点を見い出すためのものです．数学はすでに完成された学問ではなく，常に進歩続ける学問です．それから，数学に答が１つ，ということははありません．もちろん，問題が厳密の設定された後には，最終的な答は１つです．(そうでないとこまります)．でもアプローチ，つまり問題設定の方も非常に大切で，現実を上手に記述し予想できるような数理モデルをいかに作るか，いかに単純で強力な理論を作るか，ということには答は無数にありえますね．それから，数学者というのは，どちらかというと，すでに偉大な業績をあげている人を指します．ですから，私 (石川) の場合，まだその途中なので,「数学研究者」を自称しています.「数学研究家」というと趣味的になるので，それでもよいのですが．ともかく，私 (石川) は数学研究者です．

問． 先生が数学に興味をもたれたのは，いつごろどのようなきっかけですか？

答． ボーッとしている子供だったので覚えていません．いまもボーッとしていますがね．

問． 先生の授業はわかりやすくて好きなのに後期は教えてもらえません．後期は線形代数 II を習うようですが，II で終わりですか？線形代数学 I で学んだ計算法などを使うのでしょうか？

答． ありがとう．そうですね．一応，II で線形写像や固有値の話を学んでおけば，線形代数について十分に学んだということになると思います．II では，もちろん線形代数 I で学んだことを駆使します．乞う御期待．

問． 僕は経済学に進むつもりなのですが，ここで学ぶ数学は，役に立つことがありますか？また，よく,「経済に微積分はつきものだ」と言われました．これは本当ですか？この講義をとった理由は，経済学部のガイダンスの時に,「これから経済学などを学ぶ上で線形代数と微積分学はとっておいた方がいいです」というふうに説明していたからだったのですが，具体的には，これからの大学の様々な講義を受ける上で，どういった講義にこの線形代数学が役に立ちますか？せっかく線形代数学を学んだのだから，できればこれを生かしたいのですが．行列は経済にどう反映されるのですか？

答． 行列のできる店は流行っている．その行列とは関係ないですが，経済学に数学は役に立ちます．というより，知らないと何もできない，話にならない，といったところでしょう．連立１次方程式を理論的に解けなくて，偏微分を使って関数の極値問題が解けなくて，経済がわかるはずはないと思います．でも，もちろん，詳しいことは，経済の先生に直接質問されることを強く勧めます．ところで私 (石川) のめざしているのは「行列のできる講義」です．どうでしたか？ではまた．