

線形代数 1 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 2 (2000年5月10日) の分

問. はき出し法 (行基本変形) をする際のルール, 基本原則の様なものがあれば教えてください.

答. 3種類ある基本変形を駆使する. その際, 行ごとにもれなく変形する. (1). まず, 基本変形のどれかを使って, $(1, 1)$ 成分を 1 にする. $(1')$. 万一, 1 列目がすべて 0 だと (1) の変形ができないから, その場合は $(1, 2)$ 成分を 1 にする. (1) の後, (2). 1 行目以外の行に, 1 行目のスカラー倍を加えて, その行の第 1 成分を 0 にする. ($(1, 1)$ 成分によるはき出し). その後, (3). 2 行目から下の行を基本変形して, $(2, 2)$ 成分を 1 にする. (4) $((2, 2)$ 成分によるはき出しをする. 以下くり返し ... といったところです.

問. はき出し法は, 1 つの方程式に対して何通りも解き方があるのですか?

答. その通りです. でも, 階段行列まで変形すれば, その階段行列は 1 通りに決まることが知られています.

問. はき出し法で解く意味はありますか? メリットは何ですか? 普通に解く方法 (代入法) のほうが早く解けると思うのですが. はき出し法は, はっきり言ってめんどろです. 今まで習ってきた方法のほうが楽に思われます. そのうち, はき出し法が楽に感じられるような問題に出くわすのでしょうか? 今日の講義で習った行基本変形で解くと, 高校まで使ってきた解き方よりも, より早く, 正確に解けるようになるものなのでしょうか?

答. そう考えるのももっともですが, ここでは, 早く解くことが目的ではありません. 目先の楽をするために勉強しているわけでもありません. だいたい, 教科書に出ているぐらいの簡単な問題を人より早く解けたとしても, もう誰も誉めてはくれません. そんなことより, 「連立 1 次方程式を解く仕組み」を深く理解するのが目標なのです. はき出し法で解くやり方が, 方程式を解く仕組みをよりよく理解するのに最適であり, この方法には方程式を解く以外にもいろいろな応用があるので, この方法を採用しているという事情があります. そのために皆さんに実際の計算をしてもらって, 仕組みを理解してもらおうという企画なのです. ご理解ください.

問. はき出し法を使うとき, 計算に出てくる数が大きくなったり, 計算する回数も多くなるため, 計算間違いをする可能性があります. なるべく計算する回数を減らす方法はありますか?

答. そうですね. 計算する回数をいかに減らすか, という問題は, その方法を理論的に研究する分野があるくらい難しいことです. しかし, たとえば, 1 列目を見て, 成分の一番小さい行を, 行の入れ換えによって, 1 行目に並べかえると, 分数の分母が小さくなり, 計算しやすい, などといった工夫はできるかと思います.

問. 行を入れ替えなくても解くことはできませんか?

答. 無理すれば解けないこともないですが, もともとの連立方程式の式の並べ方はどうでもよいので, その並び方を変えること, つまり行の入れ換えは自由にやって良いわけです. ただし, 列の入れ換えに関しては要注意です.

問. 行を入れ換えた場合, 1 行目だったものは, 次からは 2 行目として考えていくのですか?

答. 当然その通りです.

問. はき出し法では, $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ といったような行と列が同じ成分ではき出していましたが, 他の成分は使えないのでしょうか?

答. 無理すればなんとかありますが, 統一したほうがわかりやすいと思います.

問. 高校の頃, 先生から「好きな解き方で解きなさい」と言われました. 行基本変形はイマイチ, ピンとこなかったので, 自分の好きなように解きました. 答えもあっていると思います.

答. ここでは単に解くことが目的ではなく, 方程式を解く仕組みを理解することが目的なので, それに見合った方法を採用しているということをくり返し強調しておきます.

問. 「どうして, このようにすれば解けるのか」ということは触れないのですか?

答. 触れます. というより, そのことが, この講義のこれからの主題になってきます. 乞う御期待.

問．階数を調べるためには，行基本変形を最後までやらなければいけないですか？

答．階数についてだけなら，最後まで，つまり階段行列になるまで変形しなくてもわかる場合も確かにあります．しかし，基本はあくまで階段行列に変形して，0でない行の個数を数えるということです．ちなみに，行が0とは，その行の成分がすべて0，つまり零ベクトル，という意味で使いました．ですから，階数は，行基本変形で得られた階段行列の行のうち，成分がすべて0ではないような行の個数です．

問．コンピューターで連立1次方程式を解く場合，具体的にどうやるのですか？

答．専門家ではないので実際のところはわかりませんが，基本はやはり行基本変形でしょう．

問．教科書 p.5 の 1.3 の行列の積のところの (3) がよくわかりません．p.6 の例 4 の (3) と合わせて考えてもよくわかりませんでした．

答． $A \neq O$ でも $AX = B$ をみたら X があるとは限らないということですね！「そうとは限らない」ということを示すためには，そうとは限らない例を1つ示せばよいですね．それが，p.6 の例 4 の (3) です．実際，自分で計算を確認してください．このように，行列の世界は，通常の数の場合の類推が効かない場合があるわけです．

問．教科書 p.26 の階段行列の定義 (1), (2), (3) の全てが，何を言おうとしているのかわかりません．特に， $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r \leq n$ の記号 \leq の意味と，なぜ使うのかわかりません．

答． \leq は \leq と同じ意味です． q_1 が 1 になる場合もあるので等号を入れているわけです．階段行列の説明は，具体例や問題の最終段階にある行列にあてはめて考えれば，理解しやすいと思います．

問．高校でやった矢印で表されたベクトルと，ここでのベクトル (数ベクトル) に何か違いはありますか？

答．本質的な違いはないと考えて結構です．矢印ベクトル (幾何ベクトル) も基本ベクトル (基底) を決めれば，成分の組，つまり数ベクトルとして表現されます．

問．税理士，公認会計士試験や国家公務員試験に役立つ数学とは何ですか？また，そのためにはどのような勉強をすればよいのですか？

答．知りません．ところで，私 (石川) の兄は公認会計士で会計学の専門家なのですが，「行列簿記」というのがあると昔言っていました．関係ないですが．

問．スペクトル分解について教えてください．高校時代に行列の n 乗を求める時に，固有値を使う方法などとともにも，スペクトル分解を習いました．2次元を1次元 + 1次元に分けて n 乗を考えるという話を聞いたのですが，良く理解できませんでした．

答． 2×2 型行列で説明します． 2×2 型行列 A のスペクトル分解とは， $A = aP_1 + bP_2$ と分解することです．ただし， P_1, P_2 も2次の正方行列で， $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1P_2 = O, P_2P_1 = O$ となるもので， a, b はスカラーです．スペクトル分解できるためには条件が要りますが，仮にこのような分解できたとすると， $A^2 = (aP_1 + bP_2)^2 = a^2P_1^2 + abP_1P_2 + baP_2P_1 + b^2P_2^2 = a^2P_1 + b^2P_2$ となりますね．同じように， $A^3 = a^3P_1 + b^3P_2, A^n = a^nP_1 + b^nP_2$ など (スペクトル分解があれば) 簡単に計算できるわけです．

問．よい参考書を教えてください．

答．教科書がわかりやすいので，講義を聴いて，教科書の問題を自分で解いておけば十分です．参考書などまったく要らないと思います．

問．「数の悪魔」とかいう本がでていましたが，おもしろいですか？

答．読んでいないのでわかりません．でも，評判はよいようですね．

問．数学は嫌いじゃないけれど，あまり得意ではありません．どうすれば数学が得意になれるですか？

答．ともかく「ある程度時間をかける」ということ以外にないでしょう．数学の勉強に毎日1時間かけたとして，合計500時間ぐらいかければ絶対得意になります．請け合います．

問．先生にとって数学とな何ですか？

答．愛です．ではまたね．